

أسس النظم الرياضية

وتطوره

دكتور

ماهر عبد القادر محمد

كلية الآداب - جامعة الإسكندرية

دكتور

على عبد المعطي محمد

كلية الآداب - جامعة الإسكندرية

١٩٩٢

دار المعرفة الجامعية

٤. بنى سويف - الإسكندرية

٤ : ١٦٣ - ٢٨٣

أسس المنطق الرياضي

وتطوره

دكتور
ماهر عبد القادر محمد
كلية الآداب - جامعة الإسكندرية

دكتور
على عبد المعطي محمد
كلية الآداب - جامعة الإسكندرية

١٩٩٢

دار المعرفة الجامعية
٤٠ ش. سويف - الإسكندرية
ت : ١٦٢ - ٤٨٢

إهداء

إلى العالم الجليل والفيلسوف الصادق
الأستاذ الدكتور محمد علي أبوريان

هذه هي الطبعة الثانية من كتاب اسس المنطق الرياضى وتطوره الذى صدرت طبعته الأولى عن دار الجامعات المصرية عام ١٩٧٥ وفيها نؤكد أن المنطق الرياضى لم يقم من فراغ، ولم يولد ولادة حديثة مفاجئة، ولم يظهر في الأفق دفعة واحدة. إنه كان نتيجة تطور طويل حدث في ميدان المنطق ... وجعله ينتقل من منطق صوري قديم إلى منطق رياضى حديث.

وضع أرسطو أصول المنطق الصوري، وشيد بناء منطقيا رائعا، وفى ثانيا هذا البناء وجدت ارهاصات المنطق الحديث : إن في الموضوع، وإن في المنهج، وإن فى الغرض ... وجدت هذه الارهاصات أو البدايات أو البذور في صميم البناء المنطقي الأرسطى، وكانت محتاجة إلى تطوير وانضاج ساهم فيه مفكرون ومنطقيون ورياضيون كثيرون منهم أرسطو نفسه الذى وجدت عنده بذور المنطق الحديث ثم الرواقيون ثم ديكارت وليبنتز ووليم هاملتون ودى مورجان وجورج بول وبيانو وفريجة، ولقد أنضج كل واحد من هؤلاء المنطق من نقطة معينة وسار به خطوة متقدمة نحو الأمام .. وتجمعت هذه الخطوات المتتالية ، والخيوط المتتابعة ، عند رسل وهوايتهد فأقاما المنطق الرياضى كاملا مستفيدين من التطور السابق الطويل الذى لحق بالمنطق الصورى والذى كان يستهدف نقله إلى صورة رياضية متطورة.

لقد إنصب رأينا في القضية السابقة على الاتجاه القائل بأن المنطق الرياضى الحديث لم يكن هدمًا للمنطق الصوري القديم وإنما كان مجرد تطوير له، وبناءً على هذا رأى كان علينا أن نتعقب هذا التطور الضخم الذى حدث في هذا الميدان متوقفين بعض الشيء عند المنطق الأرسطى ، مشيرين إلى لمحاته العامة وبذور وإهاصات المنطق الرياضى المتضمنة فيه ثم مبيينين سير عجلات التطور إلى أن انتهى التطور بتشيد البناء المنطقي الرياضى فى

صورته النهائية..

وحينما وصلنا إلى رسل الذى تجمعت لديه الخيوط ورتبها وأعطاها سمات التناسق والتكامل، كان علينا أن نتوقف قليلا عند نقد رسل للمنطق الأرسطى، وموقفه من أساس المنطق الرياضى ومن القضية الذرية والقضية الجزئية.

وكان لابد لنا - طالما أننا نتحدث عن منطق رياضى - أن نشير إلى الصلة بين المنطق والرياضة، وقد تم تناول هذا المبحث من خلال معالجتنا لمذاهب خمسة هي مذهب التشابه الظاهري ، ومذهب جبر المنطق ، والمذهب اللوجستيقي والمذهب الاكسيوماتيكي ، ومذهب الحدسى..

هذا وقد قام الاستاذ الدكتور علي عبد المعطي محمد بكتابه الفصل الأول عن المنطق الصوري وتعريفاته وأقسامه ، والفصل الثاني عن المنطق علم قوانين الفكر. وكذلك الباب الثالث عن الصلة بين المنطق والرياضة كاملا.

وكتب الاستاذ الدكتور ماهر عبد القادر الباب الثاني بعنوان رسل بين المنطق التقليدى وبين المنطق الرياضى كاملا ، والباب الرابع بعنوان نظريات المنطق الرياضى كاملا وفيه نظرية حساب القضايا (اللوجستيقا) ، ونظرية حساب المحمول، ونظرية الفصول ، ونظرية العلاقات. وكذلك الباب الخامس عن نظرية الأوصاف. أما الفصل الثالث من الباب الأول فقد دون بالاشتراك.

والله ولى التوفيق

أ. د. ماهر عبد القادر

أ. د. على عبد المعطي محمد

الاسكندرية في

أول أغسطس ١٩٩٢

البَابُ الأولُ

من المنطق الصوري إلى المنطق الرياضي

الفصل الأول : المنطق الصوري : تعريفاته وأقسامه

الفصل الثاني : المنطق علم قوانين الفكر .

الفصل الثالث : الانتقال من المنطق الصوري إلى المنطق الرياضي

الباب الأول

من المنطق الصوري إلى المنطق الرياضي

قضية خطيرة سوف نحققها هنا وهي : هل كان المنطق الصوري أرماسا للمنطق الرياضي ، وبداية ضرورية له ، أو أن المنطق الرياضي ولد هكذا جديداً ومعاصراً للتيارات المنطقية والرياضية المعاصرة ؟

لقد حاول فريق من المناطق أن يفكر إمكان قيام المنطق الرياضي ابتداء من المنطق الصوري الأرسطاطاليسي القديم ، وذهبوا إلى أن أسس وعناصر وبناءات المنطق الرياضي محتلفة تماماً عن المنطق القديم ، بل هاجموا هذا المنطق : المنطق القديم من ناحية شكلية وتولوجية وعدم دقة ، هاجموا من ناحية احتوائه على حدود كلية ، وكلمات وأسماء لغوية تعيق الاستدلال ، وتعرقل انتقال الفكر من قضية إلى أخرى ، ولم يقبلوا حصر أرسطو للاستنباط في القياس وحده ، كما لم يقبلوا منهجه الرمزي الناقص ؛ والذي انحصر في ترميز المتغيرات المنطقية Logical variables دون ترميز الثوابت المنطقية Logical Constants ، وكذلك لم يقتنعوا بمحاولة أرسطو نحو تحقيق فكرة النسق الاستنباطي Deductive system ، والذي أشار إليه وفشل في تحقيقه لمسائل متعلقة بالناحية المنهجية الرمزية .

إلا أن الدراسات المنطقية المتكاثرة والمعاصرة قد ذهبت إلى اتجاه آخر مبين لاتجاه الفريق الأول تماماً . فلقد أكلت هذه الدراسات على أن المنطق الرياضي ما هو إلا تطوير وإصلاح للمنطق الصوري القديم ان في الموضوع ، وإن في المنهج ، وإن في الغرض أو الهدف الذي يهدف إليه . ولقد استندت هذه الدراسات على الصلات الوثيقة القائمة بين المنطقين من محاور ثلاث رئيسية ،

فموضوع المنطق الصوري والمنطق الرياضي معا هو الاستنباط Deduction مع فارق واحد هو أن الاستنباط في المنطق الرياضي يتحدث عن علاقات استنباطية أكثر مما نجد في المنطق الصوري والذي حصر الاستنباط في القياس وحده . كما أن المنهج في المنطقيين واحد هو المنهج الرمزي، إلا أن المنطق الرياضي خصوصاً في صورته المعاصرة تميز بدقة رمزية أعظم ، تيسر عمليات الاستنباط ، وتتيح للعقل البشري أن ينتقل بسهولة من قضية لأخرى ، تلك السهولة التي لم تكن مستطاعة التطبيق بالنسبة للمنطق الصوري والذي كانت رموزه ناقصة ، وجهازه الرمزي يشوبه الخلل ، بما احتواه من كلمات وأسماء لغوية تشير إلى ثوابته .

تمكن المنطق الرمزي من أن يقيم نفسه على هيئة نسق استنباطي ، ولقد تحقق له ذلك بسبب دقة وكفاءه جهازه الرمزي من جهة ، واتساع عمليات الاستنباط فيه من جهة أخرى ، أما واضح المنطق الصوري فلقد تنبه إلى ضرورة قيام المنطق على هيئة نسق استنباطي باعتبار أن المنطق عنده ينضم إلى مجموعة العلوم البرهانية Demonstrative sciences ، ولكنه لم يستطع أن يحقق هذا لعدم كفاءة جهازه الرمزي ، ولحصره للاستنباط في القياس ، ولكن كان الهدف واحداً عند أرسطو وعند أصحاب المنطق الرياضي وهو ضرورة قيام المنطق على هيئة نسق استنباطي .

وحينما أثبتت الدراسات المنطقية هذا ، ذاعت الصيحات القائلة : أن المنطق الرياضي ليس هدماً للمنطق الصوري القديم انه فقط مجرد تطوير أو تحديد أو إصلاح له ، وإذا أخذنا بهذا الرأي الأخير — ونحن آخذون به — فلا بد من أن نتعقب خطوات كبار المنطقه والمفكرين التي أسهمت في إصلاح المنطق القديم وتجديده وتطويره حتى صار منطقاً رياضياً . ولابد لنا أيضاً من أن

نكشف النقاب — ولو قليلا — عن المنطق الصورى الأرسطاطاليسى ، لثرى صورة خاطفة عن هذا المنطق الذى تم تطويره فأصبح رياضيا . ولهذا فسوف يتكون هذا الباب من فصول ثلاثة : نتناول فى أولها تعريفات المنطق وأقسامه ، ونتناول فى ثانيها المنطق باعتباره علما لقوانين المنطق ، ثم نتعرض فى آخرها لخطوات تطوير المنطق ذاته منذ كان صوريا حتى أصبح رياضيا .

الفصل الأول

المنطق الصوري ؛ تعريفاته واقسامه

- ١ - معنى الكلمة .
- ب - تعريفات المنطق .
- ج - أقسام المنطق الصوري .
- د - التصورات والتعريفات .

الفصل الأول

المنطق الصوري : تعريفاته وأقسامه

١ — معنى الكلمة :

تشير كلمة المنطق من ناحية الاشتقاق للغوى إلى الكلام أو النطق ، كما تشير من ناحية أخرى — إذا ابتعدنا عن الأصل اللغوى وقربنا من الكلمة اليونانية *logos* — إلى العقل أو الذكر أو البرهان

وقد جذب المترجمون العرب ، ترجمة اللفظ اليوناني بارجاعه إلى الاشتقاق اللغوى ، فدلوا بالمنطق على الكلام أو النطق : ولكن الفلاسفة العرب — لكي يقتربوا من المعنى الثاني لكلمة منطق — ميزوا بين نوعين من النطق : نطق ظاهري وآخر باطنى ، الأول يشير إلى الكلام أو التحدث ، والثاني يشير إلى المعقولات أو الأفكار ومحاولة إدراكها . يقول الجرجاني : النطق يطلق على الظاهري وهو التكلم ، وعلى الباطني وهو إدراك المعقولات . وهذا الفن (المنطق) يقوى الأول ، ويسلك بالثاني مسلك السداد ، فبهذا الفن يتقوى ويظهر كلا معنى النطق للنفس الانسانية المسماة بالناطقة ، فاشتق له اسم الناطق ، (١) .

وقد اشار داتا وماكبث في كتابها عناصر المنطق إلى شيء قريب من هذا ، فقد ذهبا إلى أن المنطق يشير من الناحية الاشتقاقية إلى أنه : علم اللوغوس *Science of Logos* ؛ أى علم اللغة العقلية ، أو الحوار العقلى ، أو علم الكلام المعبر عن الفكر ، (٢) .

لكن لما كانت اللغة تشير إلى شيء أكبر مما تعبر عنه ، وأن هذا يتضح حينما نميز بين الحدود المنطقية *Logical terms* وبين الاسماء *names* ، أو حينما

(١) الجرجاني : شروح التسمية . ص ١٢٧ و ١٢٨ .

2. Latte & Macbeath : The elements of Logic. p. 1.

يتميز بين القضايا المنطقية Logical propositions وبين العبارات ، فإنه يلزم أن
نبعد عن هذا المعنى الاشتقاق لكي نصل إلى المعنى الاصطلاحي لكلمة المنطق ،
وهو أنه علم الفكر ، أو العلم الذي يهدف إلى الكشف عن المبادئ العقلية ، التي
يقوم عليها تفكيرنا .

نحن لا نعرف على وجه الدقة أول من استخدم كلمة المنطق ، ولا أول عصر
أطلقت فيه ، ولكن برانتل (١) يضع أمامنا افتراضاً مؤداه أنه ربما تكون هذه
الكلمة من وضع شراح أرسطو . أما السبب الذي أدى بهؤلاء الشراح إلى وضع هذه
الكلمة ، فهو لكي يقابلوا بين أوجانوس أرسطو وبين كلمة الجدال Dialectic عند
الرواقين . ولقد استعمل كلمة المنطق شيشرون في كتابه De Finibus ، وأصبحت
شائعة في عصر الاسكندر الأفرويسى وجالينوس في القرن الميلادي (٢) .
والمنطق هو العلم الذي يبحث في صحيح الفكر وقاسده ، وهو الذي يضع
القوانين التي تعصم الذهن من الوقوع في الخطأ في الأحكام ، فموضوعه هو الفكر
الإنساني من ناحية خاصة ، هي ناحية صحته وفساده ، ويتم له ذلك عن طريق
البحث في القوانين العقلية العامة التي يتبعها العقل الإنساني في تفكيره ، فما كان من
التفكير موافقاً لهذه القوانين كان صحيحاً ، وما كان مخالفاً لها كان قاسداً ؛ فللمنطق
إذن ناحيتان : —

الأول : البحث في الفكر الإنساني بقصد الاهتمام إلى قوانينه ، ومعرفة
الشروط التي يتوقف عليها الصحيح منه ، وهو من هذه الناحية علم من العلوم ، له
موضوع خاص وغرض معين ومنهج محدد .

الثاني : تطبيق هذه القوانين على أنواع الفكر المختلفة لمعرفة الصواب منها

(١) برانتل prantl : كتاب تاريخ المنطق في الغرب س ٥٢٥ ، ٥٢٦ .

1 — Lalande : Vocabulaire technique et critique de la philosophie .

والخطأ . وهو من هذه الناحية فن من النمنون أو صناعة كما يسميه منطقة العرب .
وإذا كان المنطق علما قبل هو علم نظري يبحث في صورة الأحكام وقوانينها ؛
أم أنه علم عملي أو معاري ؟ وإذا كان فنا فهل يرتبط بالمنطق المادى وحده دون
المنطق الصورى ؟ هذا هو ما سنحاول الكشف عنه خلال عرضنا لتعريفات المنطق
وأقسامه وقوانينه وطبيعته وصلته بالعلوم الإنسانية ، والأبحاث التى ينقسم إليها .

تعريفات المنطق :

لقد تعددت التعريفات حول المنطق ، واختلفت الآراء فيه ومن الصعوبة البالغة
تحديد تعريف واحد له . إلا أننا يمكن أن نحصر تعريفات المنطق فى أربعة اتجاهات
رئيسية ، أو دمج المتوافق منها فى نوع واحد بحيث نجعل فى النهاية على تعريفات
أربعة هى * :-

١ - عرف بعض الفلاسفة والمنطقة المنطق تعريفا عمليا ؛ فقالوا بأنه آلة أو
صناعة . وهم يقصدون بذلك أنه لا يقصد لذاته وإنما لما يمكن أن نستفيد منه عمليا
عند تطبيق قواعده وشروطه على الأحكام والاستدلالات الموجودة فى العلوم . ومن
هنا فقد وصفوا المنطق بأنه من علوم الوسائل لا من علوم الغايات ، بمعنى أنه وسيلة
فقط توصلنا إلى أغراض عملية فى العلوم التى تدارسها ومن بين هؤلاء ابن سينا
الذى عرف المنطق بأنه آلة تعصم الذهن من الزلل . يقول ابن سينا : والعلم الذى
يطلب ليكون آلة ، قد جرت العادة فى هذا الزمان ، وفى هذه البلدان أن يسمى
علم (المنطق) ،^(١) ويذهب إلى أن المنطق : قانون صناعى عاصم للذهن
عن الزلل ، مميزة لصواب الرأى عن الخطأ . . الخ . كما يرى منطقة بور رويال
Port Royal أن المنطق فن من الفنون ، أو أنه فن التفكير Art of thinking
يمارس قوانينه على سائر الأحكام الموجودة فى سائر العلوم .

* أنظر كتاب الدكتور ثابت النخدى من أصول المنطق الرياضى ص ٣٦ - ص ٤٠

(١) ابن سينا : منطق المشرقيين ص . .

ونحن لا نقبل أن يكون المنطق آلة أو فنا أو صناعة ، إذ أن العلوم ، وخصوصا المنطق ، لها أساس نظري ، ثم قد يأتي التطبيق بعد ذلك أو لا يأتي .

٢ — وهناك فلاسفة ومناطق آخرون ، عرفوا المنطق بأنه صناعة وعلم نظري معا وفي نفس الوقت ، منهم جوبلو الذي يقرر « بأن العلوم كلها — بما فيها المنطق — نظرية وتطبيقية معا ، ^(٢) ويرى هو تبلي أن المنطق علم وفن التفكير الصحيح . وواضح أن اجتماع الفكرتين معا ، فكرة صناعة وفكره علم نظري يتضمن تناقضا ، لأن العلم النظري يتجه بأكمله إلى معرفة الحقيقة بغض النظر عن تفهها ، وإنما يحىء التطبيق إن أمكن عندالمهندسين والكيميائيين وغيرهم . كما أن هناك الكثير من الحقائق الرياضية مثلا لا يعرف له تطبيقا ، وذلك مثل الأعداد الخيالية التي ظل الرياضيون يهربون من استعمالها والاستفادة منها زمنا طويلا . ونحن نجد أيضا اكتشافات في علم الطبيعة لا نجد لها تطبيقا ، وذلك مثلا اكتشاف هرتز الموجات الكهرومغناطيسية ، ولما سئل عن فائدتها ، أجاب أنه لا يعلم شيئا عنها إلا أنها موجودة ، ولكن بعد سنوات اتضح أنه يمكن استغلالها في الرسائل البرقية . وإذا فن هناك حقائق غلبة بغض النظر عن التطبيق ، ولا يصح في تصور علم من العلوم أن تجمع بين كونه صناعة وبين كونه علم نظري في آن واحد ، فهذا تناقض .

٣ — فلاسفة ومناطق آخرون ، ذهبوا إلى أن المنطق علم معياري normative وهم يقصدون بكلمة معياري أن قوانين المنطق تصبح بالنسبة للفكر كماير ثابتة يجب أو ينبغي أن يرقى إليها كل تفكير صحيح . ونحن نجد هذه الفكرة عند الغزالي الذي سمى كتابه في المنطق معيار العلوم ، وسمى كتابه في الأخلاق ميزان العمل يقول

(١) السامري : البصائر النظرية ١ .

2. Goblol : Traite de logique p. 1

الغزالي إن المنطق هو القانون الذي يميز صحيح الحد عن غيره ، فيتميز العلم اليقيني عما ليس يقينياً وكأنه الميزان أو المعيار للعلوم كلها ، (١) ولعل فـوت هو الذي أثار هذه المسألة في العصر الحديث حين ميز بين العلم النظري والعلم المعياري ، وعين ذهب إلى أن المنطق والجمال والأخلاق علوم معيارية ترتبط بقيم ثلاث هي قيم الحق والجمال والخير على التوالي .

وهذه النظرة هي أقل النظرات قبولا لأنها جمعت بين كون المنطق علما وبين كونه معياريا ، وهذا تناقض . يقال أنه لا يوجد علم معياري ولقد أصبح هذا الرأي شائعا منذ ظهور كتاب ليني برييل المسمى « علم العادات الأخلاقية » ، وهو كتاب في الأخلاق ، إلا أنه يمكن أن ينسحب ما فيه على المنطق أيضا ، ذلك لأن الأخلاق كما تصورها الفلاسفة إنما تفرض علينا مثلا علما أو معايير يجب أن يرقى إليها السلوك الإنساني ، إذا أريد به أن يكون خلقيا . وهذا ما لم يسمح لها بأن تقوم كعلم طوال تاريخ الأخلاق ، وهي لكي تصبح علما كغيرها من العلوم الاجتماعية يجب ألا تكون معيارية . ويمكن الإشارة إلى آراء ليني برييل في هذا الصدد على النحو التالي : —

قضايا العلم تستمد من الواقع ، وتعتبر عما هو كائن ، بصيغة المضارع عادة ؛ كأن تقول مثلا « الحديد يتمدد بالحرارة » ، « واضع المنطق أرسطو » ، « الأرض تدور حول الشمس » ، فهذا هو ما يسمى بالأحكام التقريرية Assertion Gudgeant ، وإذا كان الأمر كذلك أي إذا كان العلم يعبر عما هو كائن فقط ، فمن التناقض تصور علم بمعنى كلمة العلم هذه تكون قضاياها غير مستمدة من الواقع ، وإنما تعتبر عما يجب أن يكون عليه الواقع . وهذا يتأتى بالطبع من صيغة الوجوب كأن تقول مثلا « يجب أن يتمدد الحديد بالحرارة » ، فمثل هذا الحكم وغيره هو الذي تقوم عليه العلوم المعيارية

كالأخلاق والجمال والمنطق ، وهى علوم يتصورها الفلاسفة على أنها تنرض علينا واجبات ، وتستن معايير يقاس عليها ، هى القواعد أو القوانين الخلقية والجمالية والمنطقية .

إلا أن الأخلاق وغيرها إذا أرادت أن تكون علما بكل معانى الكلمة فلا بد من ابتعادها عن فكرة المعيارية هذه ، أى لا بد أن تكفى بأن تنقضى الوقائع وتدرس السلوك الإنسانى . كما هو حادث فى المجتمعات ، وتستنبط منه القوانين الخلقية وتلزم الناس بها .

هذا النقد الذى وجهه ليني بريل للنصور المعيارى للأخلاق يمكن أن يوجه للمنطق ، فهو إذا أراد أن يقوم كعلم حقيقى يجب ألا تتصوره معياريا ، ولا معبرا عن أحكام معيارية ، لأنه حينئذ سيصبح متناقضا مع كونه علما .

والواقع أن المنطق فى صورته الحاضرة ، أصبح تماما كالرياضية استنباطا صرفا خاليا من كل إشاره معيارية . ولذلك فإن النقد الذى وجهه ليني بريل للأخلاق يمكن أن ينسحب أيضا على المنطق فلا نعرفه بأن علم معيارى .

٤ - بقى تعريف أخير للمنطق وهو أنه علم نظرى ، وهذا التعريف يعتبر من أنسب التعريفات للمنطق الصورى والمنطق الرمضى على حد سواء فيذهب جيفونز إلى أن المنطق هو « علم قوانين الفكر »^(١) كما يرى كينز أن المنطق هو العلم الذى يستقصى المبادئ العامة للفكر الصحيح ،^(٢) ويرى هاملتون أن المنطق هو علم قوانين الفكر كفكر ،^(٣) . ويذهب هيجل إلى أن المنطق هو « علم الفكرة المحضة ، وهى محضة لأنها تكون فى وسط مجرد من

1. Jevons : Elementary Lessons of logic Ch. 1 .

2. Keynes : Formal logic p. 1 .

3. Hamilton : Lectures in logic. first lecture.

التفكير^(١)، كذلك يذهب بوزانكيت Bosanquet إلى أن المنطق «علم صوري وأن العلوم كلها صورية»^(٢). كما ذهبت سوزان استننج إلى أن المنطق هو «علم قوانين الفكر الضرورية»^(٣). كذلك عرف كثير من المناطق المنطق بأنه علم نظري أيضا منهم بول Boole وجونسون Johnson وجوزيف Joseph وجون استيوارت مل J. S Mill وولاس وبراى وجويكم.

ومن هذه التعريفات كلها يتضح أن المنطق علم نظري له موضوعه الخاص به، كما أنه ينظر في صور الفكر لا في مادته، كما أن لهذا المنطق منهج معين يستخدم فيه الرموز، غرض معين. كما أن المنطق الرمزي، وهو أحد صور التطور للمنطق الصوري، أصبح علما نظريا رياضيا صرفا كالمهندسة أو الرياضة.

ح — أقسام المنطق الصوري

إعتاد المنطقة تقسيم المنطق الصوري إلى ثلاثة أقسام رئيسية، القسم الأول يتناول التصورات أو الحدود والقسم الثاني يتناول القضايا أو الأحكام والقسم الثالث والآخر يتناول الاستدلالات. وهذا التقسيم الثلاثي منحدر إلينا من أرسطو واضع المنطق الصوري نفسه، فلقد خصص أرسطو لكل قسم كتابا مستقلا، ويقوم هذا التقسيم على تقسيم عملياتنا العقلية كما يقول كينز إلى ثلاثة أقسام أولا إدراك الأشياء المفردة وهي وسيلتنا في معرفة التصورات، ثانيا إدراك العلاقات بين كل حدين من تلك الحدود أو التصورات التي أتت إلى ذهننا في القسم الأول ثم

1. Wallace . The logic of Hegel. p. 30

2. Bosanquet : Logic or the morphology of Knowledge ,
Book I. Ch I. p . 21 .

3. Stebbing : A modern introduction to logic .

ثالثا وأخيرا ، تركيب استدلالاتنا من القضايا التي توصلنا إليها في القسم الثاني والتي اعتمدت بدورها على حدود القسم الأول ويقودنا القسم الأول الخاص بالتصورات إلى التعريف، بينما يقودنا القسم الثاني الخاص بالقضايا إلى الأحكام، أما القسم الثالث فيقودنا مباشرة إلى البرهان .

ولقد إنتقل هذا التقسيم الثلاثي برمته إلى الإسلاميين وقبلوه كما هو ، فزرى ابن سينا مثلاً يقرر في النجاة بأن كل معرفة أو علم فهو تصور أو تصديق وأن التصور هو العلم الأول ويكتسب بالحد (أى بالتعرف) . . . ثم يتحدث ابن سينا عن القياس ولكنه لا يذكر القضايا وأعل هذا راجع إعتباره أن القياس يتضمن القضايا وأن القضايا تتركب من الحدود أو التصورات. كذلك يذهب الساوى في مقدمة كتابه البصائر النصيرية إلى أن المنطق ينقسم إلى تصور وتصديق ، والتصور هو حصول صورة شيء ما في الذهن فقط فاذا سمعنا باسم من الأسماء تمثلنا معنى الاسم في الذهن دون أن يقترن هذا التمثيل بحكم ، أما التصديق فهو حكم العقل بين تصورين أو حكيمين . وإذا تعدقنا في دراسة تقسيمات المنطق لدى المسلمين فانتنا لا نجد هناك أى إستثناء من ذلك التقسيم للمنطق إلى تصور وتصديق ، وقد إنتقل هذا التقسيم من العالم الإسلامى إلى العالم الذى يتكلم باللاتينية وظل العالم متعارفا منذ عهد بوتييس Boece (متوفى عام ٥٢٥) على تقسيم المنطق على هذا النحو... تصور وتصديق وانقسام التصديق إلى أحكام واستدلالات، ولكن منطقة تصور وروبال أضافوا إلى هذه الأقسام الثلاثة عنصرا ديكارزيا رابعا هو النظام، فأصبح المنطق عندهم منقسما إلى التصور والأحكام والاستدلالات والنظام .

ولقد رفض الكثيرون إدخال فكرة النظام هذه ضمن العمليات المنطقية ، ورفضوا تخصيص قسم خاص لها لأن النظام مفترض في تصوراتنا واستدلالاتنا

ولا داعي لتخصيص قسم خاص له . ومن هنا فلقد عادت فكرة ثلاثية أقسام المنطق إلى الظهور وقد قبلها بعض المناطقة قبولاً وحنضها البعض إلى قسمين فقط بينما لم تكن شاغل البعض الثالث على الإطلاق .

يقول لاتا وماكيث في كتابها عناصر المنطق *The elements of Logic* (ص ١٧، ١٨) إن المنطق الصوري قد انقسم لعصور عديدة إلى ثلاث مذاهب رئيسية : الأول هو مذهب الحدود ، والثاني مذهب القضايا ، والثالث مذهب الاستدلال ، ولكن كان هناك دائماً خلط وسوء فهم على طبيعة الحدود أو التصورات لمحاول المناطقة دراستها وهي مستقلة عن القضايا ، وكذلك حاولوا دراسة القضايا وهي مستقلة عن الاستدلالات ؛ وذلك ظناً منهم أن التصورات والقضايا والاستدلالات تمثل ثلاثة أنواع مختلفة من عمل الفكر ، فبينما تأتينا الحدود أو ما تعبر عنه هذه الحدود من التصورات عن طريق الإدراك ، فإن القضايا تأتي عن طريق عملية أخرى نسميها بالحكم نركب فيه حداً إلى حد آخر بينما يشير الاستدلال إلى عملية عقلية ثابتة نمر فيها من قضية معينة إلى قضية أخرى مختلفة لتلك التي أعطيت لنا أولاً ؛ وهذا هو مادعى بعض المناطقة إلى أن يتخيلوا القضايا وهي مستقلة عن الاستدلالات ، وأن يتخيلوا الحدود وهي مستقلة عن القضايا ، أو أن يتخيلوا بأن ما يأتي إلى العقل أولاً هي الحدود ثم نقوم بتركيب هذه الحدود في قضايا ثم نقوم بتركيب هذه القضايا في استدالات . ولكن هذا يعد أمراً مضللاً كما يرى لاتا وماكيث ومتناقض مع الوصف الحقيقي لتفكيرنا ، فنحن لا نفكر مطلقاً في حدود مستقلة أى في أفكار مبعثرة وفرادى ، فتفكيرنا يشير إلى شيء مترابط ومن هنا فنحن نفكر دائماً في قضية أو في حكم . فالحدود تشير دائماً إلى أحكام وقضايا ، كما أن القضايا تشير دائماً إلى استدالات .

ويرى كينز في كتابه *Studies and exercises in Formal logic* (ص ٨) أنه من المعتاد أن نقسم المنطق الصوري إلى ثلاثة أقسام يعالج القسم الأول منها الحدود أو التصورات ، ويعالج القسم الثاني منها القضايا أو الأحكام ، ويعالج القسم الثالث الاستدلالات ، ثم يقرر أن هذا التقسيم هو تقسيم اصطلاحى أو إتفاقي إتفقنا على وضعه على هذا النحو . ويرى كينز أن ثمة اعتراضات كثيرة قد وجهت إلى هذا التقسيم ، وأن بوزاسكيت من بين المعارضين على هذا التقسيم لأنه يرى أن المنطق ينقسم إلى قسمين فقط هما الحكم والاستدلالات ، ويمضى كينز فيقرر أن المنطق إذا كان مهتما بالصدق والكذب فإن هذا الصدق وذاك الكذب لا يوجدان إلا فى الحكم وفى الحكم وحده ، ومن هنا فإنه يجوز لنا أن نعتبر أن هذا الحكم أو القضية المعبرة عنه الوحدة المنطقية الأساسية ، وعلاوة على ذلك يقول كينز إن التصور لا يمكن أن يكون حالة كاملة فى العقل ، ولكنه يكون كذلك إذا انضم إلى التصورات الأخرى ، وينتهى كينز من مناقشته تلك فيقرر أنه إذا ابتداء فى كتابه بمناقشة الحدود أو التصورات فانما يكون ذلك من أجل التيسير والترتيب وحسب ثم يدعونا إلى أن نضع فى ذهننا دائماً أن القضية أو الحكم هى الوحدة المنطقية الحقيقية ، وأن الأهمية المنطقية الحدود لا يمكن أن تفهم تماماً إلا بالإشارة إلى دورها فى القضايا أو فى الحكم.

كذلك انتقد برادلى فى كتابه مبادئ المنطق *The principles of Logic* فكرة تقسيم المنطق إلى ثلاثة أقسام ، فى مقابل التقسيم الثلاثى المؤلف للبحث المنطقى إلى تصور وحكم واستدلال يقتصر برادلى على القسمين الأخيرين لأنه يرى أن الحكم لا التصور هو الوحدة الحقيقية للفكر والصورة المنطقية الأولى ، وأن هذا الحكم ذاته متصل بالوعى الكامل : وأما حينما نحكم إنما نقطف من هذا الوعى

أو الشعور المتصل جزءاً منه بينما هذا الجزء لا يمكن فصله على الحقيقة من هذا التيار المتصل ، فالإتجاه الكلى -إتجاه غالب فى منطق برادلى وميتافيزيقاه . ولقد تأثر برادلى تأثراً واضحاً اعترف به فى مقدمة الطبعة الثانية من كتابه مبادئ المنطق بأفكار بوزانكيت فى المنطق ، وأعلن دينه صراحة للمنطق البوزانكيتى ، فلتوقف إذن برهة عند هذا الفيلسوف ، لنرى موهب تفكيره حول هذه النقطة .

إن الحكم هو بداية المنطق عند بوزانكيت لا التصور ؛ لأن أى فكرة أو خطرة حينما تطرأ على الذهن إنما تثير ارتباطات متنوعة وعلاقات متعددة ؛ بل إن الإسم أى لاسم ، يشير إلى دلالات منطقية ، ومن هنا فإن المنطق البوزانكيتى لن يبدأ كما بدأ المنطق الصورى بالتصورات ؛ إن الأحكام فى المنطق البوزانكيتى تفرض ذاتها من أول وهلة ولأول الأمر . والحكم عند بوزانكيت لم يعد هو المجهول الذى نضيفه إلى الموضوع . بل على العكس من ذلك فعن الحكم عنده معادل للشعور الإنسانى اليقظ فى اهتمامه بالعالم .

ويرى بوزانكيت فى كتابه أسس المنطق The essentials of logic أن الأحكام المنطقية هى بمثابة الأجزاء المنبثقة من الشعور الدائم أو المستمر والى خرجت من هذا الكل وانفصلت بالفاظ اللغة ، وأن أحكامنا المنطقية كلها ما هى إلا أجزاء أو إطارات نعيشها فى لحظة من هذا الحكم النهاى والكلى الذى يشير إلى كل الحقيقة محمولة على ذاتها .

والحكم عند بوزانكيت ليس هو القضية كما ارتأى ذلك كينز ولا ما كبت ، فع أن الوحدة اللغوية التى تقدم لنا الحكم تسمى بالقضية ، فإن هذه القضية المنطوقة أو المكتوبة تختلف عن الحكم اختلافاً أساسياً ، فبينما تشير هذه القضية إلى حكم معين يجب أن الحكم يتجاوز ما هو مكتوب أو منطوق . ومن ناحية ثانية يقرر

بوزانكيت في كتابه المنطق أو مورفولوجيا المعرفة *Logic or the morphology of Knowledge* أن الحكم لا ينظر إلى الموضوع والمحمول والرابطة على أنها أجزاء منفصلة كما هو الحال بالنسبة إلى القضية ، كما أنه ليس بمثابة علاقة بين الأفكار أو بمثابة الانتقال من فكرة هي موضوع إلى فكرة هي محمول ، إذ الحكم وحدة لا انقسام فيها ولا انقسام . ومن ناحية ثالثة فإن القضية ترى باعتبارها متقسمة إلى موضوع ومحمول تربطها رابطة أن هناك انتقالاً من الموضوع إلى المحمول . أي أن الموضوع يكون لدينا أولاً ثم نضيف إليه المحمول بعد ذلك ، وهذا يترتب عليه انتقال زماني . وبوزانكيت يقرر أن هذا غير موجود بالنسبة إلى الحكم فيذهب في كتابه السابق إلى أن التحدث عن الانتقال من الموضوع إلى المحمول خاطئ كلية ، فالموضوع لا يكون لدينا أبداً أولاً ثم نضيف إليه المحمول ، إن الحكم عملية فكرية لا تأتي عن طريق إضافة قطعة إلى قطعة ، إنها عملية متصلة ومتراصة وفي هذا يقول بوزانكيت أن الحكم الكامل تماماً كالعملية التي ينجم عنها حائر بوضوح على الديمومة ، وهذه الديمومة لا تتصل بالحكم وحده الذي رأينا أن من الخطأ أن نقول بسبق زماني فيه بين الموضوع والمحمول — ولكنها تتصل أيضاً بعملية الانتقال من حكم إلى حكم آخر ؛ إذ لا يجوز لنا أن نقرر بأن هذا الحكم سابق بينما هذا الحكم لاحق ؛ والنتيجة هي أن الديمومة تسيطر هنا على الحكم وعلى العمليات الفكرية المتصلة بها ، وأنه لا يجوز لنا أن نقول بانفصال أو بتجزئة أو بسبق زماني إذ أن الحكم يختلف عن القضية في هذه الأحوال فهو متصل غير منقسم ويمتاز بالديمومة .

وعلى ذلك فالمنطق البوزانكيتي نسقي *Systematic* وعضوي *Oiganic* ولقد سار برادلي على هذا المنوال ، كذلك كان هيجل سائراً على نفس الخط الحكي والنسقي والعضوي الذي نجده عند بوزانكيت وبرادلي وجويكم . ومن هنا نلقد

رفضوا جميعا الاتجاه إلى تقسيم المنطق إلى تصورات وأحكام واستدلالات ؛ فالمنطق عندهم يسقط التصورات من مباحثه ويقتصر على دراسة الحكم والاستدلال وحسب.

وقد عبر بوزانكيت عن هذا المعنى أحسن تعبير حينما ذهب في كتابه التضمن والاستدلال التسلسلي *Implication and linear inference* إلا أنه لابد من النظر إلى المنطقي كمنسق أى النظر إليه ككل مترابط واحد تتضمن أجزاؤه بعضها بعضا، وذلك لأنه يمثل الشعور الكلى المتصل والمتحد . وأن العقل يفقد وحدته وحقيقته إذا وضعنا عملياته ومنطقه في سلسلة تسلسلية لارابط بينها ولا توحيد.

ومع أن لوتز يبدأ منطقَه بدراسة مبحث التصورات أو الحدود ذاهبا إلى أن الأحكام يجب أن تفترض على الأقل تصورات بسيطة ؛ لأن الأحكام تتكون من التصورات ؛ إلا أن الدراسة العميقة لمنطق لوتز ولـميتافيزيقاه ؛ تبين بوضوح أنه اتبع هذا الأسلوب لا من ناحية منطقية أو ميتافيزيقية ؛ ولكن لكي يقدم ترتيبا واضحا لقارئيه ؛ وهو نفس الأسلوب الذى اتبعه كينز ؛ فرغم عدم اعترافه بأن المنطق يبدأ بالتصورات ، ورغم مناداته بأن الحكم هو الوحدة المنطقية الأولى ؛ إلا أنه بدأ كتابه بدراسة التصورات من أجل تقديم ترتيب واضح لقارئيه. ولقد تنبه بوزانكيت إلى ذلك فقرر تعقبا على رأى لوتز السابق : أنه من الصعوبة أن نعتقد فى أن كل هذا النقاش يعبر حقيقة عن فكر لوتز ، فقد يكون هذا قد نتج عن شغف لوتز الزائد فى أن يقدم ترتيبا واضحا وكاملا لقارئيه .

أما جوبلو فلقد ذهب فى كتابه *Traité de logique* إلى أن التصور هو إمكان الحكم بأحكام غير محدودة ؛ فالتصور إنسان مثلا لا يشير إلى الإنسان الموجود حاليا فقط وإنما ينطبق على كل من كانوا وكل ما يمكن أن يكونوا ، فهو

إذن بدل على أعداد غير محدودة من الاحكام ، ومن هنا فإن التصور ليس في حقيقته إلا مجموعة من الاحكام المنفردة الممكنة ، وعلى هذا فالحكم أسبق من التصور ، بل إن التصور في صميمه مجموعة من الاحكام الممكنة ، وأنه لا وجود للتصورات إلا في الاحكام ومن ثم فنقطة البدء في المنطق هي البحث في الاحكام لا في التصورات.

وإذن فلقد ذهب الكثير من المناطق الحديثة إلى أن التقسيم الارسطي الثلاثي للمنطق لم يعد قائما الآن ، وإنما أصبح المنطق منقسما إلى قسمين فقط هما الاحكام أو القضايا من جهة وذلك إذا جاز لنا أن نقول أن القضية مرادفة للحكم ، ثم الاستدلالات من جهة ثانية .

ولعل مشكلة تقسيم المنطق على هذا النحو أو ذاك لم تعد شاغل المفكرين والمناطق الحديثة الذين اهتموا بالمنطق الرياضي؛ فإذا بحثنا المذاهب المختلفة التي تعرضت لمثل هذا المنطق الرياضي فالتنا لن نجد عند أى منهم أى اتجاه لهذا التقسيم أو ذاك . فذهب التشابه الظاهري بين الرياضة والمنطق أجمد نفسه في إيجاد التشابهات الظاهرة بين المنطق والرياضة ، وهو قد ذهب إلى أن الصلة بين المنطق والرياضة تقوم في أن العلين صوريان وأنها رمزيان وأنها ميكانيكيان أو آليان ومن هنا فقد كان كل ما يهم أصحاب هذا المذهب من المنطق هو تلك النواحي التي يتشابه فيها مع الرياضة من حيث كونه صوريا لا ماديا ورمزيا في متغيراته وثوابته وميكانيكيا في عملياته تماما كالرياضة ولم يبحثوا إطلاقا في مسألة تقسيمه .

أما مذهب جبر المنطق الذي أقامه لينتز وجورج بول فلقد كان اهتمامه منصبا على المنطق بصورته الجبرية وعلى اعتبار ذلك المنطق الذي نرسم إلى ثوابته ومتغيراته برموز الجبر فرعاً من فروع الرياضة وامتدادا لمباحثها وقوانينها .

أما المذهب المضاد لمذهب جبر المنطق وهو المذهب اللوجسيتي الذي ساهم في

قيامه. فريجة Frege بدقة تحليله المنطقي وبيانو Peano بدقة رموزه ووضوحها
والذى اتضح فى صورته النهائية على يد رسل Russell فى كتابه Principles of
mathematics وفى كتابه بالاشتراك مع هوايتهد المسمى Principia mathematics
فلم يهتم إلا ببيان أن الرياضه فرع من فروع المنطق ، وأن المنطق بقوانينه إنما
يبتلع الرياضه بكافه فروعها ، ولم يبحث مسألة التقسيم اطلاقا .

أما دافيد هيلبرت إمام الرياضيين فى ألمانيا فلقد أنشأ مذهبا آخر أسماه بالمذهب
الاكسيوماتيكي Axiomatic ذهب فيه إلى أن المنطق ليس جزءا من الرياضه ،
كما ذهب إلى ذلك أصحاب مذهب جبر المنطق ، كما أن الرياضه ليست جزءا من
المنطق كما ذهب إلى ذلك أصحاب المذهب اللوجستيقي ، وإنما يمكن رد المنطق
والرياضه معا إلى أصول لا منطقيه ولا رياضيه وينبثق من هذه الاصول المنطق
والرياضه معا ، وهذه الاصول الاكسيوماتيكيه لابد أن يتوفر لها شروط منها
شرط الاشباع وشرط الاستقلال وشرط عدم التناقض ، ولكن هيلبرت لم يشر
إطلاقا فى أبحاثه ومذهبه إلى مسألة تقسيم المنطق هذه .

إن ما أهتم به المنطق الرياضى هو فكرة الاستنباط من المسلمات والتعريفات
لكل قضايا المنطق ، أو محاولة إقامة نسق استنباطى نبرهن فيه على كل القضايا
ابتداء من مجموعتين من المسلمات والتعريفات . إن المنطق الرياضى هذا أستبعد
تماما العمليات السيكلوجيه من مباحثه ، فهو لم يبحث فيما إذا كان التصور يأتى إلى
الذهن أولا بمفرده أم لا ، كما أنه لم يبحث فى ارتباط تصوراتنا سواء أردنا أو لم
نرد بأحكامنا بحيث تصبح هذه الأحكام هى البنيه المنطقيه الأولى ، أنه منطق إلى
ومزى صرف . واستنباطى يُصرف لا يتصل بالمعرفه ولا بكيف نعرف ، وما إذا
كانت معارفنا متصله أو منفصله . أنه كما قلت منطق آلى لا روح فيه .

من هذا نرى أن تقسيم المنطق الذى بدأ ثلاثيا مر بمرحلة اعتبره فيه المناطقة ثنائيا، ثم لم يعد النظر فى ثلاثية أقسامه أو ثنائيتها أمرا يثير انتباه مناطقه الرياضية إليه ولا مداد أقلامهم حوله .

د — التصورات والتصديقات :

ونحن إذا غرضنا النظر عن تلك التطورات المثيرة التى تعرضت لها أقسام المنطق، وإذا نظرنا فقط إلى التقسيم القديم المتصل بالمنطق الصورى فى صورته الأولى والذى قلنا أنه ينقسم إلى ثلاثة مباحث أو أنه ينقسم إلى تصور وتصديق، والتصور مرتبط بمبحث التصورات والتصديق متصل بمبحث القضايا أو الحكم وبمبحث الاستدلال فإننا نستطيع أن ننظر فى تقسيم آخر يخضع له التصور كما يخضع له التصديق. فالتصور ينقسم إلى تصور بديهي وإلى تصور نظري والبديهي من التصورات هو الذى ندركه إدراكا مباشرا الاوساطة فيه وذلك بسبب وضوحه البين وعدم احتياجه إلى تعريف نعرفه به أو دليل نقيمه عليه، أما النظرى من التصورات فهو ما لا يجده بينا وواضحا مثل وضوح التصورات البديهية، وإنما نحن تصورده بإعمال الفكر وكده .

كذلك ينقسم التصديق إلى تصديق بديهي وتصديق نظري والبديهي من التصديقات يمثل القضايا والأحكام التى يصدق بها العقل بذاته وغريزته، ولا تحتاج إلى أكثر من مجرد تصور أجزاء الحكم، فإذا تصور العقل تلك الأجزاء سارع إلى التصديق بها على الفور، ومن أمثلة تلك القضايا : الكل أكبر من الجزء وأن الأشياء المساوية لشيء آخر متساوية فهذه لا تحتاج إلى عناء فكري فى تصديقها وإلى جهد أو دليل يبين حقيقتها . أما النظرى من التصديقات فهو يمثل القضايا والأحكام التى يحتاج العقل لى يقبل أن يقيم الدليل عليها وإلى أعمال فكره فيها .

وثمة تقسيم آخر للأحكام نجده عند جوبلو : فهو يقسم الأحكام إلى أحكام تجريبية ، وإلى أحكام برهانية . أما الأحكام التجريبية فهي تلك الأحكام التي تقوم على المدركات الحسية ، ولكي يكون الحكم التجريبي يقينياً يجب أن يتوافر فيه شرطان فيجب أولاً : أن يفرض نفسه ضرورة على العقل الذي يحكم ، أى أن يكون نزيها قائما على الإدراك الآتى إلى العقل من الشيء الذي يحكم عليه ، ويجب ثانياً أن يفرض نفسه ضرورة على عقل كل شخص خاضع لنفس الظروف ، بمعنى أن يكون صدق الحكم غير مقصور على ، وهنا تتحقق الموضوعية التي لا تتعلق بالذات المنعزلة المدركة وحدها وإنما تتعلق بكل ذات موضوعة في نفس الظروف ، فالصدق ليس مرتبطاً بى فقط وإنما الصدق صدق بالنسبة إلى الجميع . وتنقسم الأحكام التجريبية إلى ثلاثة أنواع :

١ - أحكام الاختلاف : وهي تلك الأحكام التي تقرر بأن المحمول يختلف عن الموضوع ، وصورة مثل هذه الأحكام ، هذا ليس ذاك . وأحكام الاختلاف هي أبسط أنواع الأحكام التجريبية ، لأنها تقوم على التمييز الذي يقوم بدوره على التفاوت والاختلاف والتباين ، والحكم لا يقوم على التمييز . فبدون هذا التمييز لا نستطيع أن نحكم .

٣ - أحكام الذاتية : وهي تلك الأحكام التي تقرر بأن المحمول هو الموضوع ، وصورة مثل هذه الأحكام : هذا هو هو ذاك ، أو هذا بعينه ذاك . وأحكام الذاتية عند جوبلو غير مبدأ الذاتية الذي قلنا أن صورته أ هي أ ، ذلك لأن قولى أنسقراط هوسقراط طبقاً لمبدأ الذاتية ليس حكماً ولا ينمى فى أى علم فهو تحصيل حاصل . أما حينما أقول أن أ و ب هما دالتان مختلفتان لمداول واحد ، أى حينما أقرر أن هذا الرجل سقراط ، فعنى هذا أن الرجل الذى

أشير إليه والرجل المعروف باسم سقراط هما رجل واحد بعينه ، فكأن أحكام الذاتية لا يقصد بها الذاتية من كل وجه كما رأينا ذلك ونحن بصدد قانون أو مبدأ الذاتية ؛ وإنما المقصود بها هو ذاتية من وجوه ، واختلاف من وجوه أخرى ولكن درجة الاختلاف لا تسكاد تدرك فالشيئان الذاتيان لا يمكن التمييز بينهما ولكنهما ليسا غير متميزين .

٣ — أحكام المقارنة : وهي تلك الأحكام التي تقوم على فكرة الأكبر والأصغر ويعبر عنها في اللغة باسم التفضيل ، ويجب ألا نخلط بينها وبين أحكام الكم أو المقدار ؛ لأننا لسنا بصدد العدد ولا المقياس بمعنى أن المقارنة هنا ليست كمية أو عددية .

أما الأحكام البرهانية فتقوم على استنتاج قضية من قضية أخرى ؛ والأحكام البرهانية لا تستمد من التجربة والإدراك المباشر كما هو الحال في الأحكام التجريبية ولكنها تستند إلى إقامة الأدلة والوصول من قضية إلى قضية أخرى سواء عن طريق الاستنتاج أو القياس أو الاستنباط . وللأحكام البرهانية نوعان فهي إما أن تكون مستنتجة من أحكام تجريبية ، وهذا ما يسمى بالاستقراء Induction ؛ وإما أن تكون مستنتجة من مبادئ عقلية أو قضايا عامة وذلك هو الاستنباط deduction

الفصل الثاني

المنطق علم قوانين الفكر

- ١ - المنطق علم
- ٢ - قوانين الفكر الأساسية .

الفصل الثاني

المنطق علم قوانين الفكر

١ - المنطق علم :

أنقسم المنطق القديم، كما سنرى فيما بعد، إلى قسمين : منطق صوري ، ومنطق مادي . وهذا التقسيم ذاته يرتبط بالمشكلة المطروحة أمامنا الآن وهي : هل يمكن اعتبار المنطق علما من العلوم التي تهدف إلى الكشف عن الحقيقة لذاتها بغض النظر عن فائدتها العملية ؟ أم أنه مجرد فن من الفنون يهتم بالتطبيقات وبيان المناهج العملية المؤدية إلى المنفعة والفائدة ؟ أم أنه علم وفن في آن واحد ؟

لقد تبينت ردود المناطق على هذا السؤال ، فمنهم من ذهب إلى أن المنطق علم يعبر عن مجموعة من النظريات والقوانين والقواعد التي توجد في الذهن بغض النظر عن التطبيق عليها وعن الفائدة التي يمكن أن تستخرج من هذا التطبيق ، ومنهم من رأى أن المنطق فن أو صناعة يهتم بالتطبيق وبالفائدة والعمل . ومنهم من رأى أن المنطق علم وفن معا لأنه يكشف عن الحقائق النظرية ثم يحاول تطبيقها وبعبارة أخرى فإذا كان المنطق صوريا كان علما ، وإذا كان ماديا كان فنا ، وإذا كان صوريا وماديا معا كان علما وفنا .

ولعل أول من أثار هذه المشكلة على هذا النحو هو كاسيودور *Cassiodoro* (المتوفى عام ٥٧٠ م) ولكن جذور المشكلة — مع ذلك — ترجع إلى عدة قرون قبل كاسيودور وتمتد في التراجع إلى أرسطو نفسه واضع المنطق .

فلقد تعارف شراح أرسطو مثل الإسكندر الأفروديسي وأمونيوس وسيمبليقيوس
وفيلبون على تقسيم الفلسفة الأرسطية إلى قسمين :

١ — علم نظري غايته الوصول إلى الحقيقة لذاتها دون نظر إلى أى
منفعة عملية .

٢ — علم عملي يستهدف أصلاً المنفعة العملية .

ومع ذلك فنحن نجد في كثير من المؤلفات الأرسطية (١) وفي مواضع متفرقة
من هذه المؤلفات أن أرسطو يميز بين ثلاثة مجموعات من العلوم هي : —

١ — العلوم النظرية التي تهدف إلى طلب الحقيقة لذاتها .

٢ — العلوم العملية وغايتها المنفعة .

٣ — العلوم الشعرية التي تتناول الإنتاج الفني وخصائصه .

وتنقسم العلوم النظرية إلى علوم ثلاثة هي علم الطبيعة ، وعلم الرياضة ، وعلم
ما بعد الطبيعة ، كما تنقسم العلوم العملية إلى ثلاثة علوم هي علم السياسة وعلم
الأخلاق وعلم تدبير المنزل .

وإذا نظرنا في التقسيم الأول أو الثاني فإننا لا نجد المنطق بين علوم هذين
التقسيمين ؛ ومن هنا لاحظ المشاؤون الذين أتوا بعد أرسطو أنه لا يوجد مكان
 للمنطق في تقسيمه للعلوم ؛ واستنتجوا أن المنطق ليس جزءاً من الفلسفة ، وليس
علماً من علومها . ولذلك اعتبروا المنطق على أنه مقدمة وتوطئة ومدخل للفكر

(١) أنظر كتاب الحدل — الكتاب الثالث — الفصل الثالث ف ه ؛ أ — وأيضاً

الكتاب الثامن — الفصل الأول من ١٥٧ أ — كتاب الأخلاق النيقوماخية — الكتاب الثالث

الفصل الثاني : ف ١٠٣٤ أ — كتاب الميتافيزيقا — الكتاب الأول — الفصل الأول

والفصل السابع .

لاغنى عنه أو اعتبروه آلة للعالم أو دأور جانون، أو علما آليا. حقا لقد أطلق أرسطو على المنطق اسم العلم التحليلي، وأطلق عليه أيضا العلم الآلى . ولكن النظر في تقسيماته جعلنا نقرر بكل وضوح أن المنطق ليس على الإطلاق جزءا من الفلسفة أو علما من علومها .

* * *

أما الأبيقورية (١) ، فلقد اعتبرت المنطق علما وأسمته العلم القانوني. والفلسفة الأبيقورية تنقسم إلى ثلاث أقسام رئيسية هي المنطق أو العلم القانوني وعلم الطبيعة وعلم الأخلاق . ولقد ذهب أبيقور إلى أن علم المنطق وعلم الطبيعة خادمان للأخلاق وموجهان لحياة الهدوء والسكينة والسلام ، غاية الأخلاق وهدف الفلسفة ، والمنطق الأبيقوري يرتبط ارتباطا وثيقا بالمعرفة ، ويبحث في شروط المعرفة الحقة ، ويرى أبيقور أن هناك أربعة أنواع للمعرفة هي الإحساس والتصورات والانفعالات والحدس النكري . والإحساس هو أساس هذا المنطق المادي ، والتصورات تكرر للأحساس ، والانفعال الذي نحسه بداخلنا يقينى ، أما الحدس النكري فهو الذى نستطيع الاستدلال بواسطته على وجود ما يسميه أبيقور باللامحسوسات (الذرات والخلأ) .

(١) الأبيقورية تنسب إلى أبيقور ٣٤١-٢٧٠ ق.م . ونرى أن العالم مكون من أعداد لا متناهية من الذرات المادية التى تتحرك فى الخلأ اللامحدود ، وتسقط هذه الترات الى أسفل بفضل الثقل الذى فيها . كما أن انحرافها أثناء سقوطها يهيئ لها أن تتقابل فتكون الأشياء . والمذهب الأبيقورى يعد صورة متطورة من المذهب الذرى القديم الذى أسسه لوقيطوس ديموقريطس ويختلف عنه فى ادخال أبيقور لفكرتى الثقل والانحراف . لمزيد من الايضاح نرجع لكتاب تاريخ الفكر الفلسفى - أرسطو والمدارس المتأخرة - للدكتور محمد طه أبو رمان وكتاب ديموقريطس فيلسوف الذرة وأثره فى الفكر الفلسفى حتى صورة الحديثة للدكتور عبد الهادى وآخرين .

كذلك اعتبرت الراقية المنطق علما ؛ إذ تنقسم الفلسفة الرواقية بدورها إلى أقسام ثلاثة هي : علم المنطق ؛ وعلم الطبيعة ؛ وعلم الأخلاق . ولقد اعتبر الرواقيون العالم الخارجى بما فيه من جزئيات مادية أساس المعرفة وأساس المنطق . وذهبوا إلى أن المعرفة لابد أن تبدأ من الإدراك الحسى أى من إدراك هذه الجزئيات ، وأن التصورات أو الأفكار التى تأتى إلى النفس عن طريق الإدراك الحسى هى وحدها البقية مادام أن مصدرها هو الإحساس .

وهم يتحدثون عن مراتب اليقين ؛ ويقررون أن أولى درجات المعرفة أو مراتبها هو الأثر الحسى المباشر أو الصورة الحسية ، ثم تعرض هذه الصورة الحسية على النفس فتقبلها أو ترفضها فإذا قبلتها وصلت إلى مرتبة التصديق وهى الدرجة الثانية ، فإذا تيقنت النفس من صوابها فى قبولها للصورة الحسية وصلت إلى مرتبة التفهم الصادق وهى الدرجة الثالثة ، وأخيراً تصل النفس إلى مرتبة العلم وهى الدرجة الرابعة ؛ والعلم الرواقى يقوم على مجموعة مترابطة من الإدراكات الحسية .

ولا يقبل الرواقيون بحث المقولات الأرسطى ؛ ذلك البحث الذى ذهب إلى أن هناك عشر مقولات ؛ بل يقررون أن المقولات تتمثل فى مقولة الوجود وما يتفرع عنها من مقولات . وهذه المقولات المتفرعة عن مقولة الوجود أربعة هى : مقولة الجوهر ، والجوهر هنا مادى خالص على عكس مقولة الجوهر الأرسطية المكونة من هولى وصورة أو صورة وحسب ؛ ومقولة الصفة وهى تقابل مقولة الكيف عند أرسطو ، والحالة العرضية وتقابل مقولة الجهة عند أرسطو ، والحالة العرضية النسبية وتقابل مقولة الإضافة عند أرسطو .

ولا يقبل الرواقيون أيضا مبحث التصورات ولا مبحث القضايا ولا مبحث القياس الأرسطى ؛ لاحتواء هذه المباحث على الحدود الكلية . بل نادوا باتجاه مجزئ

ولسمى مشنص. فكان منطق الرواقين مخالفا أشد للاختلاف للمنطق الأرسطاطليسي. وما يهمنا الآن فيما يتعلق بنقطتنا قيد البحث أن المنطق الرواقى أصبح علما من العلوم موضوعه الجزئيات المادية المشخصة (١).

وحينما انتقل التراث الفلسفى اليونانى إلى العالم الإسلامى، أتت مشكلة طبيعة المنطق، وهل هو علم أو فن إليه. وكثرت الآراء حول هذه الطبيعة، فمنهم من عرض للمشكلة كما هى دون تحديد موقف ومنهم الخوارزمى والتهاونى. يقول الخوارزمى: «إن بعض الفلاسفة جعل المنطق جزءا ثالثا غير هذين (يقصد الجزء النظرى والجزء العملى) ومنهم من جعله جزءا من أجزاء العلم النظرى، ومنهم من جعله آلة للفلسفة، ومنهم من جعله جزءا منها وآلة لها، (٢) كما يذهب التهاونى إلى شيء قريب من هذا حين يقول: «اعلم أنهم اختلفوا فى أن المنطق من العلم أم لا، ومنهم من قرر أن المنطق علم وفن فيذهب الفارابى فى بعض مؤلفاته إلى أن المنطق جزء من الفلسفة أو علم من العلوم ويذهب فى بعض مؤلفاته الأخرى إلى أنه آلة للفلسفة، وبالمثل يذهب اخوان الصفا، فهم تارة يسمون العلوم الفلسفية إلى أربعة هى الرياضيات والمنطقيات والطبيعيات، والإلهيات، ومن ثم يصبح المنطق علما، وتارة أخرى يقررون أن المنطق هو آلة أو أداة الفيلسوف، (٣) كذلك يتجه ابن سينا نفس هذا الاتجاه فيقول: «والعلم الذى يطلب ليكون آلة، قد جرت العادة فى هذه البلدان أن يسمى (علم المنطق) ولعل له عند قوم آخرين إسماء آخر

1. Brochard : Etudes de philosophie ancienne et moderne, P. 37.

(٢) الخوارزمى : مفاتيح العلوم ص ٧٩ .

(٣) التهاونى : كتاب اصطلاحات الفنون ص ٣٨ .

لكننا نؤثر أن نسمية الآن بهذا الاسم المشهور ، (١) . ومنهم من قرر أن المنطق فن أو آلة يقسول الجرجاني المنطق ، آلة قانونية تعصم مراعاتها الذهن من الخطأ في الفكر ، فهو علم عملي آلي ، كما أن الحكمة علم نظري غير آلي ، (٢) .

وفي العصور الوسطى المسيحية - يقرر تريكو - انتهى الرأي الابيقوى والرواقى من أن المنطق يعتبر علما نظريا ، فذهب القديس توما الاكوينى ، ومن سار على نهجه من الفلاسفة المسيحيين المتأثرين بأرسطو إلى أن المنطق فن ؛ بينما جمع القسم الآخر من الفلاسفة المسيحيين الذين تأثروا بأفلاطون أو الأفلاطونية الحديثة أو تأثروا بأفلاطون وأرسطو معا - جمعوا - الفن إلى العلم فاعتبروا المنطق علما وفنا في نفس الوقت (٣) .

* * *

وفي العصور الحديثة نجد أرنو Arnauld ونيقول Nicole (٤) صاحبي منطق بور رويال يذهبان إلى أن المنطق فن ، ويعنوان كتابها في المنطق باسم ، المنطق أو فن التفكير Art of Thinking ولقد ذهبا إلى أن فائدة المنطق هي اكتشاف الخطأ في الحجج المعقدة ، وتوجيهها إلى التفكير السليم . كذلك اعتبر ديكارت المنطق على أنه فن من الفنون (٥) ، وكتب كتابين هما ، قواعد لهداية العقل ، و مقال عن المنهج لهداية العقل إلى الصواب ، يظهر من عنوانهما تحديده للمنطق

(١) إين سينا : منطق المشرقين ص ٥ .

(٢) الجرجاني : التعريفات (مادة منطق) .

3. Tricot : Traité de logique. p. 15

(٣) أرنو : (١٦١٢ - ١٦٩٤) ونيقول (١٦٢٥ - ١٦٥٩) .

باعتباره فنا كذلك سار اسبنوزا على نفس المنوال ووضح كتابه « إصلاح العقل »
الذي اعتبر فيه المنطق كفن من الفنون .

ولقد أراد هوبل (١٧٨٧ - ١٨٦٣) أن يضيق شقة الخلاف التي اتابت
هذه المشكلة خلال تاريخها الطويل ، فذهب إلى أن الفن يفترض دائما العلم ،
كانت درجة هذا الفن ، وكذلك فإن العلم يفترض دائما الفن ، من حيث أن العلم لا بد
له من التطبيقات ، كما أن هذه التطبيقات يجب أن تكون نابعة عن علم وعن قواعد
وقوانين فكرية . ومن ثم فليدعى هوبل *whately* المنطق بأنه علم وفن
التفكير الصحيح . وهذا هو نفس ما قرره جوبلو بقوله « إن العلوم كلها ، حتى
أكثرها نظرية ، قابلة للتطبيق » (١) .

ونحن نلن في العصور الحديثة المعاصرة ، عود إلى الرأي الايقوري والرواق
القديم ، فترى طائفة كبيرة من المفكرين والمناطقة يعتبرونه علما ، فيذهب جيفونز
إلى القول بأن المنطق هو « علم قوانين التفكير » (٢) كما يرى كينز
أن المنطق « هو العلم الذي يستقصى المبادئ العامة الفكر الصحيح ؛ وأن موضوعه
هو تفسير ، ات الاحكام . لا باعتبارها ظواهر سيكولوجية وإنما باعتبارها معبرة
عن معارفنا ومعتقداتنا . وينتج المنطق على وجه خاص نحو تحديد الشروط التي
ننتقل بفضلها من أحكام معروفة لنا إلى أحكام أخرى نستنبطها من الأولى » (٣) . كما
يذهب لاتا وما كيث أن المنطق « هو علم اللوغوس ؛ أي علم اللغة المنطقية ،
اللغة التي تعبر عن الفكر » (٤) . ويرى ولتون أن المنطق هو « العلم الذي يحل

1. Goblots : Traité de logique. p. 1

2. Jevons : Elementary lessons of logic. ch I.

3. Keynes : Formal logic. p. I.

4. Latta & Macbeath : The elements of logic. p. I.

للعلاقات الموجودة بين المقدمات والنتائج في كل العلوم ، (١) . ويدير هاملتون في نفس الاتجاه فيقرر أن المنطق هو د علم قوانين الفكر كفكر ، (٢) .

والمنطق عند هيغل علم أيضا ؛ هو د علم الفكرة المحضة ؛ وهي محضة لأنها تكون في وسط مجرد من التفكير (٣) أما بغيته أو منتهاه فهي الفكرة المطلقة ؛ والفكرة المطلقة هذه هي ، الفكرة التي تتحد فيها الفكرة الذاتية بالنكرة الموضوعية (٤) أما موضوع المنطق فهو الحقيقة التي تنبثق أساسا عن التفكير . يقول هيغل والحقيقة هي موضوع المنطق ، والبحث عنها يوقف كل حماسا (٥) ثم يقرر بعد ذلك أن الحقيقة مساوية للتفكير أو الفكر فيقول : إن الفكر هو موضوع المنطق ، (٦) .

ويقوم المنطق الهيجلي على الجدل ؛ والجدل هنا ليس فنا قائما على براعة المجادل كما كان الأمر عند الأغريق ؛ وإنما هو حوار العقل الخالص مع ذاته ؛ يناقش فيه محتوياته ؛ ويقيم به وبواسطته العلاقات بين هذه المحتويات . فهو إذن كما يقول هيغل (مبدأ كل الحركات والنشاطات التي نجد ما في الواقع) (٧) . ويتكون الجدل الهيجلي من الفكرة Thesis والنقيض Antithesis والمركب منها Synthesis (٨)

-
1. Welton : Intermediate logic. p . 12 .
 2. Hamilton : Lectures in logic . First lecture .
 3. Wallace : The logic of Hegel. p. 30.
 4. Russell; B : A history of western philosophy . ch. xxii. p. 759 .
 5. Ibid : p. 31 .
 6. Ibid : p. 33 .
 7. Findlay ; J.N. : Hegel A re-examination. ch. iii p. 65.
 8. Russell; B . : A history of western philosophy, xxii p. 759 .

ومع ذلك يجب أن نحترس هنا من فكرة أن الجدل ماهو إلا منطق. إذ أننا نجد الجدل وندلتق به في البناء الهيكلى كله ؛ وفي نسقه الفلسفى برمته . ولكنه يتسم فى كل فرع من فروع ذلك البناء وهذا النسق بطبيعة نوعية خاصة ؛ فهو فى فلسفة الطبيعة مثلاً موجود ، ولكنه يتسم بطبيعة نوعية خاصة تخالف الطبيعة النوعية الخاصة التى نجده بها فى فلسفة الدين مثلاً أو فى فلسفة التاريخ وهكذا .

والمنطق الهيجلى ينقسم إلى ثلاثة مذاهب: الأول هو مذهب الوجود ، والثانى هو مذهب الماهية ، والثالث هو مذهب الفكرة الشاملة . وهذا التقسيم الثلاثى يشبه المثلث الذى يمثل الضلع الأول فيه الوجود ، بينما يمثل الضلع الثانى فيه الماهية ، ويمثل الضلع الثالث أخيراً مذهب الفكرة الشاملة .

كذلك رأى بوزانكيت أن المنطق علم صورى ، وأن العلوم كلها صورية ، من حيث أنها تقوم على تعقب الخصائص الكلية للأشياء أى البناء الذى يجعلها ما تكون عليه . إلا أن هذه العلوم تختلف فى درجة الصورية ، (١) على نحو ما بينا ونحن بصدد دراسة أقسام المنطق . وبوزانكيت يقيم المنطق أيضاً على الجدل ، ويربطه بالمنطق كما فعل ذلك هيجل .

ولقد سار على نفس المنوال برادلى الذى ذهب فى كتابه مبادئ المنطق عام ١٨٨٢ إلى أن المنطق علم يبدأ بالحكم : فالحكم لا التصور هى الوحدة الأصلية للفكر ، والمعنى عنده أو الفكرة المنطقية تظل على ما هى عليه مما تغيرت المعطيات ، وهى ذلك الجزء من مضمون الشعور الذى أوقفه الذعر وأخرجه بالتالى من مجال الزمان . ومع ذلك فبرادلى يقضى علم النفس من مجال المنطق ، وهو يعرف الحكم

3. Bosanquet; B : Logic or the morphology of Knowledge.
Book 1. ch 1. p 21.

بأنه هو « العمل الذى يحيل مضمونا فكريا إلى واقع متجاوز لذلك الفعل »^(١). كما قامت سوزان إستبنج ، بعمل مؤلف أسمى « مقدمة حديثة فى المنطق » وقت فيه بين المنطق الصورى وبين المنطق الرمزى ، بل وردت المنطق الأخير إلى المنطق الصورى القديم ، ورأت أن المنطق الحديث ما هو إلا تعديل أو تطوير أو إصلاح للمنطق القديم . ولقد ذهبت فيما يتعلق بنقطة قيد البحث إلى أن المنطق علم قوانين الفكر الضرورية^(٢) .

وفى نفس هذا الاتجاه سار بول^(٣) وجونسون^(٤) وجـوزيف^(٥) وجـون استيوارت مل^(٦) ، وإدوارد كيرد^(٧) وجون كيرد^(٨) وولاس^(٩) وجونس^(١٠) ومويرهيد^(١١) . ودولدين^(١٢)

-
1. Bradley; F. H. : Principles of Logic Book II. part II. p. 286.
 2. Stebbing. S. : A modern Introduction to logic ch. xxiv. p. 2.
 3. Boole : The laws of th ght.
 4. Johnson; w. E. : Logic. Vol. 1.
 5. Joseph; H. W. B. : An Introduction to logic p. 13.
 6. Mill; J. S. : A system of logic. Book II ch 7.

(٧) إدوارد كيرد هيجل انجليزى (١٨٢٥-١٩٠٨) نشر الحركة المثالية فى جلاسجور .
(٨) جون كيرد ، هيجل انجليزى (١٨٢٥-١٨٩٨) أدخل منطق وفلسفة هيجل فى كتابه .

(٩) وليام ولاس ، كتب عن منطق هيجل ، وترجم معظم مؤلفاته (١٨٤٤-١٨٩٧)

(١٠) هنرى جونس ، مؤلف هيجلى متحمس لهيجل (١٨٥٢-١٩٢٢) .

(١١) جون هنرى مويرهيد (١٨٥٥-١٩٤٠) تملك بالحركة المثالية فى انجلترا وسار

بها بكل اندفاع وحماة وصرونة وإخلاص .

(١٢) دولدين (١٨٥٦-١٩٢٨) أم مؤلفاته كتابه (الطريق إلى الحقيقة) الذى

يعترف فيه بأن كتاباته كلها قد اقتبسها من هيجل .

وبيلي (١) وسميث (٢) وجويكم (٣) .

ولقد زاد فنت (١٨٣٢ — ١٩٢٠) المسألة تعقيدا حين تساءل . إذا كان المنطق علما قبل هو علم نظري أو علم معياري ! فأخذ على عاتقه تقسيم العلوم إلى نظرية ومعارية ، والعلوم المعيارية عنده هي المنطق والجمال والأخلاق ، وترتبط بقيم ثلاث ؛ فالمنطق يرتبط بقيمة الحق ، وعلم الجمال يرتبط بقيمة الجمال ، وعلم الأخلاق يرتبط بقيمة الخير . وبينما نجد الأحكام في العلوم النظرية أحكاما واقعية ، نجد الأحكام قيمية في العلوم المعيارية . يقول موي : يتميز العلم المعيارى عن العلم المؤلف بأنه يتكون من أحكام قيم ؛ وأنه يصل إلى هدفه دون أن يستمد أسباب ترجيحاته أو أحكامه من شئ سوى الموضوع نفسه . . . فالمعيار شئ أصيل في العلم المعيارى ؛ وهو الذى يكون موضوعه الخاص ، (٤)

ومن ثم ينتج أن المنطق علم معيارى ، يرتبط بقيمة الحق وموضوعه الأحكام القيمية ؛ إلا أن لى بريلى ذهب فى كتابه « الأخلاق أو علم العادات الأخلاقية » ، إلى أنه من التناقض أن يتحدث الإنسان عن « علم » معيارى ، لأن العلم هو علم بالواقع ومرتب بالأحكام الواقعية ؛ ولا نستطيع أن نستنتج ما يجب أن يكون بما

(١) جيمس بلاكيل ، (١٨٧٢ — ١٩٤٠) ربط باسم هيجل .

(٢) جون الكسندر سميث ، (١٨٦٣ — ١٩٣٩) قائل بهيجل من طريق برادلى وهوزانكيت .

(٣) هارولد هنرى جويكم ، من فلاسفة المثالية المطلقة ، آمن بمنعبر المطلق (١٨٦٨ — ١٩٣٨)

(٤) موي : المنطق وفلسفة العلوم ، ترجمة فؤاد زكريا الجزء الأول ص ٢٤٤ .

هو كائن . ويتشبه . لينى بريل إلى أن ثمة تناقض بين فكرة العلم وبين فكرة المعيارية (١) .

* * *

ويتمى المطاف بنا إلى القول بأن المنطق ليس فنا ، وليس فنا وعلمًا وليس علمًا معياريًا ؛ وإنما هو علم نظري ؛ هو علم التفكير الصحيح ، فذلك هو ما انتهت إليه الدراسات المعاصرة حول طبيعة المنطق .

ب - قوانين الفكر الأساسية :

لما كان المنطق هو علم قوانين الفكر ، أو العلم الذى يحاول الكشف عن المبادئ التى يسير عليها الفكر الإنسانى ؛ فإنه يلزم أن تناول هذه القوانين بالدراسة .

وأهل الفيلسوف اليونانى هراقليطاس صاحب مذهب التغير والصيرورة ، والذى ذهب إلى أن الشئ يحوى ضده فى نفس الوقت ، وأن التناقض هو سممة الحياة والوجود ؛ وأن الإنسان لا يستطيع أن ينزل إلى البحر مرتين ؛ هو الذى اضطر أرميندس إلى المناداة بالثبات والذاتية واضطر أرسطو أن يضع للفكر قوانينًا عامة يسير بمقتضاها وجعلها قوانينًا أولية سابقة على كل تفكير ، بمعنى أن العقل وجدوهى فيه . وقد حصر أرسطو هذه القوانين فى ثلاث ، ولكن ليعتد ذلك الفيلسوف الألمانى المحدث أضاف إليها قانونًا رابعًا هو قانون السبب الكافى ، أما القوانين الثلاثة فهى :

(١) - قانون الذاتية Law of Identity ويعبر عنه بأن *أ هو أ* ، أو أن كل

تتبع

(١) ارجع الى تعريفات المنطق * حيث ترى رأى لينى بريل بانه صير حول هذه النقطة .

ما هو هو، أو أن كل ما هو هو ذات ما هو، فحقيقة الشيء لا تتغير وتبدل كما ذهب إلى ذلك هيرقليطس والسوفسطائيين، ولكنها ثابتة كما قرر ذلك بارميندس. وقد عرف المسلمون هذا القانون تحت اسم قانون الهوية أو قانون الهوية. وتصور الذاتية يتضمن تصور الاختلاف؛ فنحن حينما نقول أن أمي إنما نعني في نفس الوقت أن لا يمكن أن تكون لا أم ومثال ذلك إنني حينما أقول سقراط هو سقراط. فإنني أعني في نفس الوقت أن سقراط لا يمكن أن يكون غير سقراط، كأن يكون طائراً مثلاً أو جماداً أو نباتاً. الخ، وعلى هذا لا يكون لقانون الذاتية معنى بدون هذا التمايز أو الاختلاف أو التباين. ونحن في المنطق نلتزم بهذا القانون ونطلب دائماً أن يكون نفس الحد له نفس المعنى في نفس الموضوع الذي تناقشه، كما يقولون.

يقول لاتا وماكبث في كتابها عناصر المنطق^(١) لقد رأى أفلاطون وأرسطو أن الشيء يحتفظ بذاتيته رغم الاختلافات التي قد تطرأ عليه. فهذا الإنسان أو ذاك وليكن سقراط مثلاً تعرض له تغيرات كثيرة، فهو يضحك أحياناً ويلعب ويتفلسف ويمشي وقد تكسر ساقه أو تبتز ذراعه ومع ذلك يظل سقراط هو هو، رغم كل هذه التغيرات التي تطرأ عليه.

وهذه التغيرات هي التي نسمع لنا كما يقول لاتا وماكبث بأن تحمل على موضوع ما عدة محمولات يكون الموضوع فيها ثابتاً والمحمولات متغيرة.

أما برادلي فقد عبر عن هذا القانون بقوله بأن ما هو حقيقي هو حقيقي دائماً وما هو كاذب هو كاذب دائماً، وأنه ليست هناك أية ظروف أو ملاسات يمكن أن

1. Latte & Macbeath The Elements of logic . P. 107 .

ثقل ما هو حقيقى إلى ما هو كاذب،^(١) ، أما جون ستيوارت مل فقد عبر عن هذا القانون بقوله : إن ما هو حقيقى فى صورة ما يكون حقيقيا — فى كل الصور الأخرى التى تحمل نفس المعنى ،^(٢) .

ويذهب كينز فى كتابه المنطق الصورى إلى أننا نعنى بالذاتية ، ذلك القانون الذى يؤكد ذاتية الموضوع وليست ذاتية الكيفيات أو المحمولات ،^(٣)

٢ - قانون عدم التناقض Law of non-contradiction ويعبر عنه بأن : لا يمكن أن يكون أ ولا أ فى نفس الوقت، وهذا القانون يكمل القانون الأول، أو هو تعبير عن القانون الأول فى صورة سلبية؛ فنحن حينما نقرر فى قانون الذاتية بأن أ هى أ فإننا ننفى فى نفس الوقت أن تكون أ لا أ . وقد عبر أرسطو عن هذا القانون بقوله : من الممتنع حمل صفة وعدم حملها على موضوع واحد فى نفس الوقت وب نفس المعنى . ثم حدد المدرسيون هذا القانون بأنه إثبات ونفى صفة معينة لشيء معين فى نفس الوقت ؛ كأن تقول سقراط طويل وقصير أو أرسطو بدين ونحيف وأن الحديد معدن وغير معدن . وقد عبر هوبس عن هذا القانون بقوله : إن الحقيقة لا تتناقض ولكنها تعبر عن وحدة متناسقة فى الفكر لا تحول إلى التناقض .

وقد عبر مل عن هذا القانون بطريقة سلبية فذهب إلى أننا إذا اثبتنا لشيء

1. Bradely : Principles of logic . P . 133 .

2. Mill; j. S. : Examination of sir william Hamilton's.
philosophy . P . 466 .

3. Keynes : Formal logic P. 454.

صفة معينة وكانت صادقة، فإننا إذا أثبتنا نقيضها إلى نفس الشيء في نفس الوقت فإننا نقع في التناقض .

ويعتبر بوزانكيت هذا القانون أساسا للنطق والمعرفة والفلسفة برمتها ، كذلك اعتبره هيجل وجميع الفلاسفة المثاليين الذين ساروا على منوالها ونادوا بالمنطق الحركي أو الجدلي أو الديالكتيكي .

ويرى ولتون أن قانون التناقض يشير إلى أن نفس الشيء لا يمكن أن يحتوي ولا يحتوي على نفس الصفة في نفس الوقت^(١) . وقد عرف المسلمون هذا القانون فقالوا إن « النقيضان لا يجتمعان معا » .

٣ - قانون الثالث المرفوع Law of Excluded Middle ويعبر عنه بأن إما أن تكون أ أو لا أ ولا وسط بين ذلك . وهو بذلك يمثل الصورة النهائية لهذه القوانين فهو ينفي نفيها قاطعا وجود وسط بين الإثبات والنفي فالحكم إما أن يكون صادقا أو كاذبا ولا يمكن أن يكون شيئا وراء ذلك . وقد عسبر أرسطو عن هذا القانون بقوله بأن لا وسط بين النقيضين ، أما المسلمون فقد عبروا عن هذا القانون بقولهم « إن النقيضان لا يجتمعان ولا يرتفعان معا » .

يقول لاتا وماكبث أن قانون الثالث المرفوع يقرر بأن « النقيضان لا يمكن أن يكونا كاذبان معا بل يلزم أن يكون أحدهما صادقا والآخر كاذبا كما لا يمكن أن يكونا صادقان معا بنفس المعنى »^(٢) ويرى ولتون « أن هذا القانون يجعلنا نجد

1. Welton : Intermediate logic. p. 15.

2. Iatta & Macbteh : The elements of logic. p. 110.

فكرنا فلا نقبل أن نحكم على القضية إلا في حدود قيمة الصدق أو قيمة الكذب ولا شيء أكثر من هذا، (١).

هذه هي قوانين الفكر الأساسية التي وضعها لنا أرسطو. ولكن الفيلسوف لينتر أشار إلى قانون رابع أسماه قانون السبب الكافي *Law of sufficient reason* والذي يقرر بأن كل ما هو موجود أو كل ما يمكن أن يوجد يكون له علة توضح لماذا كان على هذا النحو دون أن يكون على أي نحو آخر .

ولنا على هذه القوانين الملاحظات التالية :-

١ - أن هذه القوانين متصله ومترابطة ، فالقانون الأول يقرر أن الحقيقة هي هي ، أما القانون الثاني فقد قلنا أنه يثبت الحقيقة من ناحية سلبية ، يقرر أن هذه الحقيقة لا يمكن أن تكون هي ولا هي في نفس الوقت، والقانون الثالث هو بمثابة الصورة الشرطية للقانون الثاني فيقرر أن الحقيقة إما أن تكون هي هي ، وإما ألا تكون كذلك ولا شيء أكثر من هذا .

٢ - يمكن رد قانون عدم التناقض والثالث المرفوع إلى قانون الذاتية، لأننا إذا قلنا أن أ هي فإننا نعني أن أ هذه لا يمكن أن تكون لا أ ، كما نعني في نفس الوقت أن أ هذه إما أن تكون أ وإما أن تكون لا أ. وإذن فالقوانين الثلاثة يمكن ردها إلى قانون الذاتية .

٣ - هناك أساس عقلي وهناك أساس نفسي وأساس انطولوجي لهذه القوانين. الأساس العقلي يجعل فكرنا لا يقبل أي أحكام متناقضة ، والأساس النفسي يجعل النفس لا تستطيع أن تثبت قضيتين متناقضتين ، ولحكم المتناقض هو بمثابة عدم

النفس . والاساس الانطولوجى أو الوجودى يجعلنا نقبل الذاتية فى الاشياء وإلا لما كانت موجودة على الحقيقة .

٤ - هذه القوانين بديهية قبلها قبولا دون أن نطلب البرهنة عليها أو إقامة الدليل على صحتها ، فهى بديهية وفطرية ، وليست مستمدة من الخارج على عكس وجهة نظر الاجتماعيين الذين يقررون أن هذه القوانين مستمدة من المجتمع ومكسبة من الخارج .

٥ - هذه القوانين هى أساس المنطق ، كالعقل الإنسانى لا يستطيع أن يتقدم خطوة فى البرهنة والاستدلال دون أن يستند إليها ، فالقياس الارسطى سيقوم عليها كما يقوم عليها الاستدلال والمنطق برمته حتى فى صورته الحديثة المتطورة .

الفصل الثالث

الاتصال من المنطق الصوري إلى المنطق الرياضي

- أ - المنطق الصوري والمنطق المادي .
- ب - المنهج الاستقرائي والمنهج الاستدلالي الرياضي
- ج - خطوات نحو المنطق الرياضي :

- | | |
|--------------|---------------|
| ١ - أرسطو | ٢ - الرواقيون |
| ٣ - ديكارت | ٤ - لينتز |
| ٥ - هامانوف | ٦ - دي مورجان |
| ٧ - جورج بول | ٨ - بيانو |
| ٩ - فريجة | |

الفصل الثالث

الإنتقال من المنطق الصوري إلى المنطق الرياضي

١ - المنطق الصوري والمنطق المادي :

ينقسم المنطق إلى قسمين رئيسيين ؛ منطق صوري ، ومنطق مادي . يقول جونسون : إن المنطق يحاول تحليل ونقد الفكر ، وهذا التحليل قد يتعلق بالفكر نفسه أو بمبادئه وصوره ، وقد يتعلق بمضغون الفكر أو بمحتواه ، (١) ويقول كينز : إن واحدا من الأسئالة الهامة المتصلة بالمنطق يتعلق بصورية المنطق وماديته... هل المنطق صوري أم مادي ؟ ذاتي أم موضوعي ؟ يتعلق بالفكر وتناسقه الذاتي أم يتعلق بالاشياء ؟ . ويقرر أنه من المعتاد أن نقول أن المنطق صوري يهتم فقط بصور الفكر أي بطريقتنا في التفكير المبتعدة عن الموضوعات المشخصة التي تفكر فيها ، كما أنه من المعتاد أيضا أن نقول أن المنطق مادي من حيث أنه يشير إلى الموضوعات المختلفة التي تفكر فيها ؛ ثم يقرر كينز - أن المنطق صوري من جهة ، ذلك أنه لا يناول وقائع مادية . كما أن الاستدلال فيه يكون له نمط معين أو صورة محددة ، كما أن الموضوعات الرئيسية في المنطق هو محاولة الكشف عن أكثر الأنماط أو الصور دقة والتي يمكن رد كل الاستدلالات إليها - ثم يعود كينز - ويبين أن المنطق مادي من حيث أنه يشبع فضولنا بواسطة ملا هذه الصور المنطقية بمادة موضوعية مستمدة من العالم الخارجي - ويخلص كينز - إلى أن المنطق صوري ومادي في الآن عينه ، (٢) .

1 — Johnson : Logic. vol. I

2 — Keynes : Formal logic . p. p. 2 — 3,

ويرى لاتا وما كيث ، أن الفكر يرتبط دائماً بموضوع ، وأنه يكون متصلاً باستمرار بموضوعاته ، وأنه لا يوجد فكر مجرد بالكلية ، ^(١) ومن هنا فالفكر ليس منفصلاً عن الموضوعات أو إطاراً مستقلاً عنه ، رغم أننا قد نستطيع أن نميز بين الفكر وبين موضوعاته ، ففي الطبيعيات نحن نفكر في المادة والطاقة ، وفي البيولوجيا نفكر في الحياة ، وفي علم النفس نفكر في العمليات العقلية والنفسية الداخلية ، وفكرنا يختلف من علم لآخر منها وإطاراً بحسب اختلاف موضوعات هذه العلوم . ونفس الأمر ينطبق على المنطق ، فهو يبحث في الصور الفكرية الملائمة لموضوعاته . . . يقول جيفونز : إن الصورة هي تلك التي تبقى وتلدوم بينما تتغير وتبديل المادة التي تملأ بها ، ^(٢) وصور الفكر هي طريقته في التفكير بالنسبة إلى موضوعاته ، أما مادة الفكر فهي الموضوعات المختلفة التي نفكر فيها .

ولقد سمي مناطق بور رويال المنطق بأنه فن التفكير *The art of thinking* ويرى لاتا وما كيث خطأ تلك التسمية ، ومع ذلك يقرران بأن للمنطق فائدة عملية ، ذلك أنها رأيا أن المنطق لا يعلننا كيف نفكر ، كما أنه ليس آلة نكتشف بها الحقيقة ، فنحن نستطيع أن نفكر جيداً بدون دراسة للمنطق ، كما أننا نستطيع أن نكتشف الحقيقة عن طريق الملاحظة والتجربة وليس عن طريق المنطق . ومع هذا فإن المنطق يمدنا باليقين وبالدقة وبالوضوح ، ويساعدنا على بيان المغالطات ونقاط الضعف في تفكيرنا واستدلالاتنا ، ويوجهنا إلى طلب البرهنة الصحيحة الصادقة .

وبدئنا أن تلك النواحي العملية ذات النفع إنما تعود بنا إلى ما سبق أن

1 — Latta & Macbeath : The elements of logic. p. 6 ,

2 — Jevons : Elementary lessons in logic. p. 5

قررناه ، وهو أن المنطق يتصل بالواقع المادى اتصاله بالصورة فهو صورى ومادى معا .

والواقع ، أن كل العلوم — وليس المنطق وحده — تبحث عن الصورة الخاصة بالظواهر المكونة لموضوعاتها ، تلك الصورة التى تبقى ثابتة رغم تفسير ظواهرها ، (١) وهنا نستطيع أن نفهم معنى قول كينز ، بأن العلوم كلها صورية من حيث أنها تجرد الصور من الموضوعات ... وأن المنطق هو أكثر هذه العلوم تجريدا وتعميما وصورية ، (٢) ومعنى هذا أن كل العلوم تنصف بهاتين الصفتين : الصورية والمادية ، وأن العلوم لا تختلف بين بعضها البعض إلا فى درجة الصورية ، وبعضها أكثر صورية من الآخر .

ولعل هذا هو ما عبر عنه بوزانكيت حين ذهب إلى أن المادة لا توجد بدون صورة ، وأن العلوم تتجه بأكملها إلى البحث عن تلك الصورة التى قلنا أنها ترتبط بالمادة ، ويخلص بوزانكيت إلى أن كل العلوم صورية وإن المنطق علم صورى وأن الهندسة علم صورى وحتى الفيزيكيات علوم صورية ، فكل العلوم صورية ، لأنها تتعقب الخصائص والصور الكلية للأشياء .

إلا أن العلوم عند بوزانكيت تختلف فى درجة الصورية ، فكل علم يعالج نوعا من الكيفيات التى تكون بمثابة صور ، ولكن صور هذه العلوم تكون مادة بالنسبة إلى المنطق ، ومن ثم يجوز لنا أن نقرر ، بأن المنطق أعلى العلوم صورية ، (٣) .

1. Latta & Macbeath : The elements of logic p. 7

2. Keynes : Formal logic p. 3.

3. Bosanquet ; B : Logic or the morphology of Knowledge, introduction. p. 9.

ويبدو أن جيفونز ، — يقول بوزانكيت — قد أخطأ خطأ كبيرا في هذه النقطة ، فهو يرتب على النتيجة السابقة وهي أن صور جميع العلوم تكون مآده بالنسبة إلى المنطق نتيجة خاطئة تجعل المنطق علم العلوم تعود إليه العلوم برمتها وتعلن ولاءها له . ومن ثم ذهب جيفونز إلى أن العلوم جميعا تنتهي بالمقطع Logy وأن هذا المقطع مأخوذ من الكلمة Logic . وعلى ذلك النحو يصبح ال Geo'ogy هو المنطق الذي يفسر تكوين القشرة الأرضية ، ويصبح ال Biology هو المنطق المطبق على ظاهره الحياة ، ونفس الشيء ينطبق على ال Anthropology و Physiology و psychology و Zoclogy وغيرها من العلوم ؛ فكل علم من هذه العلوم — يقول جيفونز — إنما يعترف بوضوح بأنه منطق خاص ، مادنا نجد أن اسمه يضم إليه المقطع Logy ، (٢) .

ونرى بوزانكيت أن هذا التفسير الذي يربط بين اسم المنطق وبين نهايات أسماء العلوم ؛ إنما هو تفسير خاطئ تماما ؛ ذلك لأن المصطلح Logic لا يتوافق مع المقطع Logy في كلمة مثل Zoology ولكنه يتوافق مع المقطع Zoo الذي يشير إلى نطاق أو مجال علم معين لا إلى خاصيته كعلم . وبالمثل فإن عبارة علم العلوم لا تعني أن المنطق هو العلم الذي يشتمل على العلوم المتخصصة ، وإنما تعني أن المنطق هو العلم الذي يعالج العلاقات والصور العامة التي تكون مشتركة في كل العلوم من حيث هي كذاك ، ولكنه يحذف المادة منها وليس الصورة ؛ أي يحذف المستوى الخاص بالتفاصيل التي يتناولها كل علم على حدة من وجهة نظره الخاصة .

وينتهي بوزانكيت من نقده لجيفونز إلى أن كل علم من العلوم له مادته وصورته فمادة علم النبات هو النبات ، طبيعته ونشأته وتطوره ، ولكن العالم بعد دراسته

وأبحاثه وافتراضاته يكشف علاقات وكيانيات تكون بمثابة صورة المعرفة في هذا العلم . وهذه الصورة تكون بمثابة مادة بالنسبة إلى المنطق .

ومن هذا يلاحظ أن المنطق يصب اهتمامه على العمليات العقلية المجردة العليا ، وأن مادته تكون بمثابة صور العلوم المختلفة التي تكون البناء المعرفي السكلي . فهو إذن في أعلى درجة من درجات الصورية ، الأمر الذي يجعلنا نقرر بأن الجانب الصوري فيه يغطي على الجانب المادي .

وإذا ما عدنا إلى واضح المنطق نفسه نستطلع رأيه ، لظهر لنا أن أرسطو قد نظر هذه النظره المزدوجة إلى المنطق ، فالمنطق عند، صوري ومادي معا ، مع أنه غلب - خصوصا في تحليلاته الأولى - الناحية الأولى على الثانية .

لقد نظر أرسطو إلى التصورات على أنها متسلسلة في الذهن بطريقة معينة ، تخضع لقواعد عامة يسير عليها العقل ، وهو يربط بين هذه التصورات بغض النظر عما تشير إليه هذه التصورات من واقع خارجي خاضع للتجربة ؛ فهذه التصورات مترابط أولا مكونة القضايا اخلية منها والشرطية، والقضايا اخلية لها صورة محددة هي صورة الموضوع - المحمول، كما أن القضايا الشرطية تنقسم إلى قضايا شرطية متصلة وأخرى منفصلة، ولكل من هذين النوعين صورته وقواعده العقلية العامة . وإذا ما أنقلنا إلى ربط هذه القضايا فإننا نجد أنفسنا أمام القياس الأرسطي، وهو بدوره له شروطه وقواعده وصوره ، وله قالب يصب فيه هو قالب المقدمتين والنتيجة .

وهذا هو ما يجعلنا نقرر بأن المنطق الأرسطي كان منطقا صوريا إلى حد كبير ، لا يعنى بتطابق الفكر مع الواقع بقدر ما يعنى ببيان القواعد العامة التي يسير بمقتضاها الفكر وهو يربط التصورات في قضايا ثم يربط القضايا في أقسية .

ومع هذا فنحن لا نستطيع أن نقرر بأن المنطق عند أرسطو كان صوريا خالصا ، إذ المنطق لكي يكون صوريا يجب أن يهبر عن تمام اتفاق الفكر مع ذاته Consistency ، ولكي يكون الفكر متفقا مع ذاته يجب أن يخضع بالضرورة لقانون عدم التناقض Law of non-contradiction بغض النظر عن مضمون التصورات أو التصديقات ومحتواهما المادى . بمعنى آخر إن على العقل أن يهتم فقط بارتباطات التصورات والتصديقات من الناحية الذهنية العرفية بغض النظر عن كل تجربة ، وأن يراعى عدم الوقوع فى التناقض .

هذه الناحية الصورية الصرفة وإن كانت بغية أرسطو فى تحليلاته الأولى ، إلا أنه فى تحليلاته الثانية يتحدث بكل وضوح عما يسمى الآن بمناهج البحث فى العلوم ، أو بمعنى آخر يتحدث عن الاستدلال من حيث انطباقه على موضوع العلم ،^(١) وانطباق الاستدلال على موضوعات العلم إنما يرجع بنا إلى المنطق المادى الذى يهتم بانطباق الفكر مع الواقع .

ونخلص من هذا إلى أن المنطق الأرسطى كان مزيجا من الصورية والمادية ، وإن غلبت عليه الناحية الصورية . والواقع أن شراح أرسطو لم يهتموا بالناحية المادية من المنطق الأرسطى وإنما صبوا كل اهتمامهم على الناحية الصورية الصرفة من هذا المنطق .

وتحت تأثير الشراح ، وبخاصة شراح العصور الوسطى ، فهم المنطق الأرسطى على أنه منطق صورى بحث لامادة له . وأنه منطق شكلى صرف . يقول تريكو :
« إن العصور الوسطى كانت بمثابة العهد الذهبى للمنطق الأرسطى الشكلى بأقصى »

1. O'Hamelin : Le système d'Aristote p. 95 .

معاني الشكلية ، (١). ومن هنا بدأت صيحات عصر النهضة فطالب بالقضاء على هذا المنطق الشكلي العقيم الذي لا يربطنا بالواقع ، وبلغت هذه الثورة أوجها عند ديكارت ويكون وجاليليو .

ب - المنهج الاستقرائي والمنهج الاستدلالي الرياضي .

رأى أنصار هذا الاتجاه أن النكر المجرد غير قادر على اكتشاف الحقائق ؛ وإنما يجب أن نتجه إلى الرياضيات والتصورات الخاصة بالعدد وبالأعداد عند ديكارت ، وإلى النكر الواقعي القائم على التجربة والاستقراء عند يكون وجاليليو . وكان لابد أن يقوم منطق جديد في مقابل المنطق الأرسطي ؛ منطق يقوم على الاستقراء ، ويعتمد على الملاحظة والتجربة لأمور واقعية نصل منها إلى القوانين . ومن هنا أدخل منهج جديد هو المنهج الاستقرائي ، ومنطق جديد هو المنطق المادي الاستقرائي .

ومن جهة ثانية ، فلقد بدا لعلماء الرياضيات أن طريقة البرهنة بالخطوات الرياضية هي الطريقة الأدق والمثلى ، وهي الطريقة التي تتبع نسقا استنباطيا Deductive system نبدا فيه بمجموعتين من التعريفات والمسلمات ، نعلم بهما نسلما ، ثم ينتقل الذهن من هاتين المجموعتين اللتين سلم بصحتها إلى استنباط القضايا . ولقد نادى أصحاب الرياضيات وعلى رأسهم ديكارت باتباع هذا المنهج الرياضي بدلا من المنهج القياسي العقيم الذي سار عليه أرسطو والمدرسيون ، الطائفة الأولى إذن وعلى رأسها بيكون وجاليليو رأت أن المنطق القديم في حاجة إلى تجديد من حيث ضرورة إدخال مناهج جديدة في البحث عن الحقيقة تعتمد على الملاحظة والتجربة والاستقراء . أما الطائفة الثانية وعلى

رأسها ديكارت فقد رأت أن المنطق القديم في حاجة إلى إصلاح وتطوير من حيث تعديل نظرياته وضرورة تكميمها ليسهل تطبيق المنهج الرياضي عليها .

وهكذا بدأت العلوم الطبيعية في إيجاد منطق جديد يختلف كل الاختلاف عن المنطق الشكلي القديم ، ورأت أن دعامة هذا المنطق هو الواقع المادى التجريبي ، وأن منهجه هو الاستقراء الناقص وليس الاستقراء التام ؛ إذ أن هذا الاستقراء الناقص هو السبيل الوحيد لتقدم العلوم . ويلاحظ ليبنتز Leibniz أن هذا النوع الجديد من المنطق يعتمد على الحقائق والمعارف العرضية الممكنة ويقوم على مبدأ السبب الكافي Law of sufficient reason في حين أن المنطق القديم الذى تطور تحت تأثير إدخال الرياضيات عليه يعتمد على الحقائق الضرورية التى تقوم على مبدأ عدم التناقض . يقول ليبنتز فى موناډولوجيته : إن استدلالنا تقوم على مبدأين عظيمين : أولهما مبدأ عدم التناقض . وبفضل هذا المبدأ نحن نحكم على تناقضنا الذاتى بأنه زائف وينقيض ما هو زائف أو ما هو ضد له بأنه حقيقى . والمبدأ الثانى هو مبدأ السبب الكافى ، وبفضل هذا المبدأ نحن نعتبر بأنه لا يمكن أن يقال عن واقعة ما أنها صحيحة أو موجودة ، أو عن قضية أنها صادقة إذا لم تكن حاصله على سبب كافى يوضح السبب الذى من أجله جاءت على هذا النحو وليس غير ذلك ... (١)

وبعبارة أخرى فلقد أدى الهجوم على المنطق الشكلي القديم إلى قيام منهجين ، منهج استدلالى رياضى ، ومنهج استقرائى أو تجريبي يقوم على الملاحظة والتجربة والاستقراء .

ج - خطوات نحو المنطق الرياضى

وهكذا قام المنطق الرمزى لبّداء من تطوير المنطق القديم واتخذ له منهجاً يستمد يقينته ودقته من الرموز الرياضية . والواقع أنه كان لأرسطو الفضل فى وضع أصول المنطق الصورى ، ذلك المنطق الذى جرد القضايا من مادتها الكشيفية ووضعها فى صورة الموضوع - المحمول . وتلك القضية المنجردة التى صورتها أهوب اعتبرها أرسطو قضية بسيطة ، كما اعتبرها أيضاً الوحدة التى ينتهى أو يتوقف عندها التحليل . وقد يكون لدينا تركيبات تتكون من قضية أو أكثر ، ولكن تلك التركيبات نستطيع أن نحللها لنصل فى النهاية إلى تلك القضية البسيطة ، وعلى ذلك فالقضية البسيطة عند أرسطو أى القضية ذات الموضوع والمحمول هى الوحدة الأولية التى تتألف منها أية عملية فكرية أيأما كانت ،^(١).

١ - أرسطو

ولقد كانت لأرسطو نظرات قيمة جداً فيما يتعلق بموضوع المنطق ومنهجه والغرض منه ؛ فمن حيث الموضوع كان أرسطو يطلق كلمة التحليل أى المنطق على تحليل الاستدلال والاستنباط محصوراً فى القياس إلى أشكال وغروب ، ثم مد إطلاق الكلمة بحيث شملت القضايا وما بينها من صلات متعددة . والنقد الذى يوجه إلى أرسطو من وجهة نظر الوجودية الحديثة أو المنطق الرياضى الحديث لا لأن أرسطو حصر موضوع المنطق فى الاستنباط وقوانينه ، فهذا هو موضوع المنطق المعاصر وإنما هو حصر الاستنباط فى القياس وحده ، غير متنبه إلى ضرورة التوسع فى تحليل الاستنباط بحيث نرى قوانين أخرى لآتمت إلى القياس مثل علاقات المساواة ، أكبر من ، أصغر من ... الخ.

1 . Cohen & Nagel : An introduction to logic and scientific method. p. 33

ومن حيث المنهج فقد ميز أرسطو بين ما يتصل بالصورة وما يتصل بالمادة ،
وخص تحليلاته الأولى بالصورة التي هي صورة الاستنباطات ؛ ورأى القضايا كلها
في صورة واحدة هي صورة الموضوع المحمول . وتكفي نظرة واحدة في تحليلاته
ليان مدى إهتمامه بإبراز الصورة في نقاتها التام حين حاول إتخاذ الرموز للدلالة
على حدود القضية القياسية وهو ما كان يرمز لها بالحروف اليونانية الكبيرة . إلا
أن رموز أرسطو كانت ناقصة ؛ إذ أنه رمز فقط إلى المتغيرات المنطقية
Logical Variables مثل أ ، ب ، ج ولم يرمز إلى الثوابت المنطقية
Logical Constants مثل إذا ... إذن ، كل ، بعض ... إلخ ولكنه مع رمزه
الناقص هذا بين بكل تأكيد بأن كل صيغة منطقية هي دالة قضائية Propositional
Function وليست قضية محددة ذات معنى قاموسي ، ولكنه لم يبين ماهية تلك
الدالة القضائية ولم يضع لثوابتها رموزاً .

أما من ناحية الغرض فيرى أرسطو أن المنطق ينتسب بطبيعته إلى مجموعة
العلوم البرهانية demonstrative Sciences التي توصف في العصر الحديث بعبارة
النسق الاستنباطي deductive system ولكن أرسطو لم يتوسع في هذه الفكرة
ولم يقيم الدليل عليها كما أقامه في الهندسة . وفكرة كون المنطق علماً برهانياً تبين
الغرض منه عند أرسطو ، فهي تمنع من أن يكون المنطق صناعة أو صناعة وعلم
أو علماً معيارياً ، إنما هو علم نظري أي نسق استنباطي كالهندسة ولذلك سمى
أرسطو علم التحليل .

والسؤال الآن هو : هل يمكن أن تعتبر القضية الخلية التي قال بها أرسطو والتي
صورتها عنده هي : أ هو ب قضية تحليلية ؟ الواقع أننا يمكن أن نعتبرها كذلك
لأنها لا تتكون إلا من موضوع تحمل عليه محمولات معينة نستنتجها أو نستلها
من مجرد النظر في ذلك الموضوع دون حاجة إلى معيار خارجي يحدد صدقها أو

كذبها . فالقضية الخلية الأرسطية هي تحليلية من حيث أنها قضية بسيطة تنحل إليها جميع التأليفات والقضايا المركبة .

ففضل أرسطو إذن يرجع إلى أنه أول من رسم إطار القضية التحليلية وإن كانت قضايا الخلية تحتوى على حدود كلية يمكن أن تنحل إلى أبسط منها ، ولكن ثمة أمر هام نود أن نوضحه هنا وهو أن الرواقين توصلوا إلى ذلك النوع من القضايا التحليلية من حيث الإطار من جهة ، ومن حيث إحتواء القضية على حدين كليها جزئى من جهة أخرى .

والحق أن المعلم الأول صاغ مجموعة نظرياته رتبه وراته التى أودعها نسقه المنطقى بطريقة نسقية منظمة ، جعلت مؤلفاته فى هذا الجزء تصل إلى درجة قريبة من الكمال فى معظم اجزائها . فصاحب المنطق ، وواضعه الأول وهب فكراً مكنه من معالجة كل أبحاث المنطق إما بطريقة مباشرة أو غير مباشرة .

فالمنطق كما وضعه أرسطو نظرية فى القياس Syllogism الذى هو مجموعة الاستدلالات غير المباشرة ، والقياس الأرسطى يتألف من مقدمات Premises ذات صورة معينة تفضى إلى نتيجة ، وكل مقدمة من مقدمات القياس تتركب من موضوع Subject ومحمول Predicate . يقول لنا أرسطو فى التحليلات الأولى « إذا كان A تحمل على كل B ، وكانت B تحمل على كل C ، فإنه يتعين بالضرورة أن تحمل A على كل C »^(١) . هذا القياس يمكن وضعه فى الصورة التالية :

إذا كان A محمولا على كل B
وكانت B محمولا على كل C
فإن A محمولا على كل C

كما يمكن ترجمة القياس السابق إلى الصورة الرمزية التالية :

كل أ هي ب

كل أ هي ج

∴ كل أ هي ج

وفي الواقع أن وضع القياس الارسطي على هذه الصورة يقودنا إلى اعتبارين هامين بالنسبة للمنطق الارسطي :

الاعتبار الاول : يتل في أن وضع القياس الارسطي على هذه الصورة إنما يقضى إلى نتيجة هامة منادها أن أرسطو كان على دراية تامة بالرياضيات السائدة في عصره ، وأنه قد أدرك أهمية الدور الذي تلعبه الرموز والمتغيرات والثوابت في النسق المنطقي .

الاعتبار الثاني : أن وضع القياس الارسطي على هذه الصورة أيضا يعني أن أرسطو قد أدرك أهمية مسألة التضمن implication والدور الذي يلعبه في صورة القضية، رغم أن الباحثين يذهبون إلى أن مسألة التضمن قد عرفت في عصر متأخر عن عصر أرسطو ، خاصة لدى الرواقين .

لننظر الآن في فخص هذين الاعتبارين لتقف على حقيقة وجوه الفكر الارسطي فيما يتعلق بالمنطق . نحن نعلم أن أرسطو قد تلقى علومه في الاكاديمية الافلاطونية، إبان دور النشأة والتكوين ، فنهل عن افلاطون بقدر ما استطاع ، ونعلم أيضا أن تعليم الاعضاء في الاكاديمية كان يفرض عليهم دراسة الرياضيات ، فلقد وجد افلاطون أن منهج الاستلالال الرياضى هو أنجع الطرق التى يمكن بواسطتها البرهنة على وجود عالم المثل، ولذا فقد استعار المنهج الرياضى من الفيشاغوريين وطبقه

منهجهم الفرضي ، وتمسك بضرورة دراسة الفيلسوف للرياضيات ولهذا فقد كتب على باب الاكاديمية (لا يدخل هنا إلا من كان رياضياً) ، (١) ، وهذا في حد ذاته يوضح لنا أن أرسطو تشأ منذ البداية نشأه فكرية ذات طابع رياضي ، ومن ثم فإن معرفة أرسطو بالرياضيات السائدة في عصره ، ودوره وعلاء الميضية في تقدمها وجمعها ، وبصفة أخص تحليله هو نفسه لأسسها وأصولها بما تجمعه كلمة المنهج الرياضي أمر لا مجال للشك فيه ، (٢) .

والحقيقة في هذا أن أرسطو حينما أخذ يستقل بفكره عن الفكر الافلاطوني ، وجد أن نظرية المثل التي انكب على نقدها ، اذا ما جردت من رداها الرياضي أصبح من السهل تنفيذها ورفضها على أسس منطقية بحتة ، وأنه حرصاً منه على الاستقلال حتى عن المنهج الافلاطوني لم يعر الرياضيات أهمية مباشرة ، إلا أن استخدامه لها كان بطريقة غير مباشرة ، فقد استند إليها في نظرياته المنطقية ، فهو يبين لنا أن اليقين الذي تمتاز به قضايا الرياضة ونظرياتها إنما هو مستمد من أنها علم برهاني أو كما يقال الآن علم استنباطي أو نظرية أكسيوماتية (٣) ، وهذا يؤكد لنا حقيقة هامة أدركها أرسطو أيضاً ، فقد كان على بينة بأسس وأصول المنهج الاستنباطي .

يمكننا الآن أن نقرر أول خصيصة تنتمي للاعتبار الأول ، وهي أن أرسطو كان على دراية تامة بالرياضيات السائدة في عصره ، والتحليلات الارسطية مثال صادق على مثل هذا الرأي . ويتعلق بهذه النقطة أمر آخر ، كشف عنه النقاب

(١) محمد مل أبو ريان . تاريخ الفكر الفلسفي . ج ١ ص ١٤٣

(٢) محمد ثابت الفندي . فلسفة الرياضيات ص ٤٣

(٣) المرجع السابق ص ٤٣

المنطقى البولندي المعاصر يان لوكاشيفتش حين ذهب الى أن إدخال المتغيرات في المنطق من أعظم مبتكرات أرسطو،^(١) . وسواء أكان أرسطو قد اعتبر كشفه هذا بديها أم لا ، فإن المدرسين ومناطقه المصور الوسطى لم يدركوا أهمية هذا الكشف العظيم ، والذي أشار اليه كل من الاسكتلندي افروديسي ، ويوحنا النيلوبوني ، حينما قام كلاهما بشرحه لفلسفة أرسطو ومنطقه . وقد أدرك كثير من الباحثين في المنطق ، أهمية أرسطو في هذه الناحية حتى أن بعضهم يعتبره مؤسس المنطق الصوري بمعناه الحديث^(٢) .

وفضلا عن فكرة المتغيرات التي أمدنا بها أرسطو في منطقته ، فقد زودنا بنظرية هامة في الثوابت المنطقية^(٣) واهم هذه الثوابت (و) ، (إذا) ، (ينتمى الى كل) ، (ينتمى الى لا واحد) ، (ينتمى الى بعض) ، (لا ينتمى الى بعض) . لكن أرسطو في هذه الناحية بالذات لم يمس بتحاليلاته فيها الى أبعد من ذلك ، فضلا عن كونه لم يحلل المنهج الرياضى قبل أن يطور نظريته في القياس^(٤) .

على هذا النحو يكون أرسطو قد زودنا في نسقه المنطقي بفكرتين من أهم

١ . يان لوكاشيفتش . نقد نظرية القياس الارسطيه . ترجمة د. صبره . ص ٢١

2 Mearant, J. A., Formal logic, p. 212

ونحن نلاحظ أن المناطق من أصحاب النزعة الرياضية في المنطق ينتمون إلى أن المنطق الرياضى هو المنطق الصوري . ومن ثم فإنهم حينما يتحدثون عن المنطق الصوري فإنهم يمتنون به المنطق الرياضى في آخر أشكاله تطورا .

٣ - لوكاشيفتش . المرجع السابق ص ٢٧ .

4. Stebbing. S., A modern Introduction to logic, P. 481

الافكار الاساسية التي يستند اليها المنطق الحديث، وهما فكرتي المتغيرات والثوابت. أما إذا يتعلق بالمسألة الثانية والمتعلقة بفكرة التضمن، وما إذا كان وضع القياس الارسطي على هذا النحو يعنى أنه قضية تضمن أم لا، فإن لو كاشفتش من بين المعاصرين من المناطقة ذهب الى أن أرسطو قد صاغ أقيسته جميعا على أنها قضايا لزومية يتألف مقدمها من المقدمتين ويكون تاليها هو النتيجة، (١)، ومن المعروف أن التضمن بصورته الدقيقة لم يعرف صراحة الا في عصر متأخر عن العصر الارسطي، لكنه طالما أننا نقول أنه إذا كان ا ينتمى الى كل ب، كان ب ينتمى الى بعض ا، (٢)، فإن هذه قضية تضمن واضحة؛ وبالتالي فإن القياس الارسطي وضع في اعتباره مسألة التضمن، وستعرض لهذه النقطة ونحن بصدد بحث الجهاز المنطقي لدى رسل.

الا أنه يمكن لنا أن نرى بوضوح أن منطقة العصور الوسطى لم يدركوا حقيقة الفكر الارسطي في هذه الواحى، وفضلوا حصر أبحاثهم فيما يسمى بالقضية الشخصية أو القضية الخلية ذات صورة الموضوع - المحمول - Subject Predicate على ما يقول رسل (٣)

وبذلك ظل الجزء المتطور من البحث المنطقي الارسطي فى طى النسيان حتى تبين للحدثين من المناطقة أهميته وعملوا على تطويره من خلال نزعاتهم التحليلية فى المنطق. لكن إذا كان هذا هو التصور الذى يذهب اليه الحدثين من المناطقة عن المنطق الارسطي فهل يختلف تصورهم هذا عن تصورهم للمنطق الرواقى؟

١. يان لو كاشفتش. المرجع المذكور سابقا ص ١٤

٢. نفس المرجع السابق ص ٢٥

أم أنه لا توجد ثمسة فروق جوهرية بين التصورين ؟ هذا ما ينبغي أن نبهته
الآن لنوضح أجابتنا على هذا التساؤل .

٢ — الرواقيون

في الواقع أننا إذا ما نظرنا إلى المنطق الارسطي ، لوجدناه ينطلق من
التصور المنطقي البحت ، ذلك أنه من مكونات المنطق الارسطي تلك الصورة
التي تدوم وتبقى بينما تتغير وتتبدل المادة التي تملأ بها ،^(١) وبالتالي فإن المنطق
أكثر العلوم تجريدا وتعميها وصورية،^(٢) لكن المنطق الرواقي رفض الاستناد
لغير الواقع ، فالرواقيين أصحاب نزعة حسية تجريبية ومبدأ عملي ، ولذا صدرت
أبحاثهم في المنطق ونظرية المعرفة من المعطيات المباشرة للحواس التي تتكشف
للعقل من خلال الجزئيات المحسوسة ، وهذا ما جعلهم يعتبرون المنطق جزءاً من
الفلسفة ، وليس أداة لها كما تصور أرسطو^(٣) .

والمنطق الرواقي يقف على طرفي نقيض مع المنطق الارسطي ، فإذا كان
المنطق الارسطي يستند إلى التصورات العقلية البحتة ، فإن المنطق الرواقي يجمع
بين الحس والعقل معا في نسق واحد .

وهنا تتساءل : كيف ميز الرواقيين منطقهم عن المنطق الارسطي ؟

يذهب الرواقيون إلى تقسيم المنطق إلى قسمين كبيرين ، الاول خاص بالخطابة،
والثاني خاص بالجدل .

(1) Jevons., Elementary Lessons in Logic, p. 5

(2) Keynes., Formal Logic, p. 8

(3) Hamlyn : Greek philosophy after Aristotle, ch. 4, p. 68,
ed. in "A Critical History of Western philosophy", by O'Connor.

ويعتدنا في هذا الصدد القسم الخاص بالجدل ، والذي قسمه الرواقيون إلى ثلاثة أقسام ، الأول يبحث في نظرية الدلالة حيث موضوع دراسته الشعر والموسيقى والنحو أي قواعد اللغة . والثاني يبحث في المدلولات ، أي في الأشياء التي تقصدها الإشارة أو التسمية أو الدلالة . والثالث هو الجزء الذي يتضمن معايير الصدق والكذب ، أي نظرية المعرفة (١) .

والرواقيون يجعلون من الأساس الاستمولوجي ركيزة أساسية للأساس المنطقي ، ولذا اهتموا بنظرية المعرفة ، وبحثوا في معيار الصدق والكذب على اعتبار أنه الحكم الوحيد في صدق الأفكار والتصورات . وحتى يتسنى لنا استكناه حقيقة وجوه المنطق الرواقي لابد وأن نقف على أبعاد نظرية المعرفة الرواقية . تستند المعرفة لدى الرواقيين إلى الجزئي المحسوس لأن الفرد هو الحقيقة الصحيحة ، (٢) الذي تبدأ عملية الإدراك من خلاله ، فالنفس في أصلها صفحة خالية Tabula Rasa تستقبل التصورات نتيجة لانطباع الآثار الحسية الخارجية في النفس التي تتاق التصورات المتعارفة التي تقوم على الإدراك الحسي المباشر ، ومن ثم فإنها تتسم بطابع يقيني مباشر ، فإذا ما صدقناها ، فكأننا ندرك الموضوعات الصادرة عنها في ذاتها ، (٣) وهذا ما حدا بهم أن يجعلوا معيار الصحة ذاتيا يقوم على التصديق النفسي وهذا هو كل ما يؤسس حقيقة الصلة بين الحس والمحسوس ، (٤) .

من هنا نجد أن الرواقيين يميزون بين الأثر الحسي المباشر الذي ينطبع في

(١) محمد علي أبو رمان ، أرسطر ، ص ٢٧٩

(٢) عثمان أمين ، لفلسفة الرواقية . ص ٧١

(٣) محمد علي أبو رمان ، أرسطو ، ص ٢٨١

(٤) المرجع السابق ، نفس الموضوع

النفس من خلال الاحساس المباشر، وبين التصور المتضمن تصديقا من حيث كونه معيارا للحقيقة، ومن ثم فإن التصورات في جوهرها تعتبر «معايير الصدق والكذب ما دامت صادرة عن الادراك الحسى الذى هو أساس المعرفة» (١).

إن أساس المعرفة على هذا النحو، كما زودنا به الرواقيون، يلقي الضوء على طبيعة المنطق الرواقى المرتبط بنزعة الحسية، وهذا ما جعلهم يميزون بين نظرية المعنى Meaning ونظرية القضايا Propositions.

وفى مختص بنظرية المعنى الرواقية، «فلا شك أنها يرون الفكر واللغة متطابقين وذلك هو السبب فى عنايتهم بدراسة اللغة من أجل المنطق» (٢)، وإعلان مثل هذا الرأى من جانب الرواقين، يلقي كثيرا من الضوء على طبيعة الدراسات المنطقية واللغوية الحديثة، التى ترتد فى الكثير من أجزائها الى الإرهاصات الأولى التى قدمها الرواقيون فى مجال تصورهم لحقيقة الدراسات المنطقية، وليس هناك شك فى أن الرواقين قد تميزوا فى هذا المجال عن أصحاب النزعة الأرسطية.

والرواقيون يميزون بين ثلاثة أمور متميزة فى إطار نظرية المعنى هى :

١ — الكلام «وهو مجموع الحروف الملفوطة أو المكتوبة فى مثل كلمة الرواق» (٣).

٢ — مدلول الكلام «أو مضمون الفكر وهو الذى يسمونه لكتون، وهو بمثابة الوسط بين الفكر والكلام الخارجى، أو بمثابة النقطة التى يلتقيان فيها» (٤).

(١) المرجع السابق . ص ٢٩١

(٢) عثمان امين «المرجع السابق» ص ١٢٢

(٣) نفس المرجع ص ١٢٤

٣ - موضوع الكلام، وهو الشيء الحقيق المشخص الموجود في الخارج،^(١).

وفي النصف الثاني من القرن التاسع عشر نجد تشارلز بيرس (١٨٣٩ - ١٩١٤) يدرك أهمية هذا التمييز بحيث وجدناه يؤكد أنه ، لكي نؤكد معنى تصور عقلي لابد وأن نضع في الاعتبار النتائج العملية التي تنجم بالضرورة من صدق ذلك التصور ، وبمجموع هذه النتائج هو الذي يعطى المعنى السكلى للتصور ،^(٢) ، أى أن بيرس وجد ضرورة الربط بين المعانى والتصورات المجردة في إطار مذهبه البرجماتى .

ونظرا لان الرواقين بنزعون نزعة حسية تجريبية ، فان هدف المنطق لديهم يكمن فى الاستدلال الصادق^(٣) ، والاستدلال المنطقى الصحيح لا يكون إلا من خلال منطق دقيق ، ذلك المنطق الذى يهتم أساسا بالعلاقات بين القضايا ، ومن ثم فانهم يميزون القضايا عن الجمل Sentences والوقائع Facts ، وذلك لأسباب تتعلق بطبيعة منطقهم الحسى التجريبى^(٤) ، ولم يهتم الرواقيون بالحدود Terms أو المحمولات كما فعل أرسطو ، بل اهتموا بالقضايا ، وقياسا على هذا اعتبروا المحمولات ناقصة بالنسبة للقضايا ، وهم فى هذا يلتقون مع بعض المناطق المعاصرين فى اعتبار القضية بمثابة الصورة الأساسية للفكر^(٥) .

وتقسيم القضايا أو تصنيفها لدى الرواقين يختلف عن ذلك التقسيم الارسطى المعهود فى كتب أرسطو المنطقية، فبينما نجد أرسطو يصنف القضايا تصنيفا رباعيا،

(١) نفس المرجع ص ١٢٥

(2) Peirce, c.s., Collected papers. vol. v. p. 6

(3) Hamlyn, op. cit, p. 68

(4) Ibid, p. 68

(5) Ibid, p. 69

حيث ينسب محولا من المحولات الى موضوع في الصور الاربعة^(١) : الكلية الموجبة حيث (كل أ هي ب) والكلية السالبة حيث (كل أ ليست ب) ، والجزئية الموجبة وفيها (بعض أ هي ب) ، والجزئية السالبة والتي صورتها (بعض أ ليست ب) ؛ على اعتبار أن هذه الصور جميعا لدى أرسطو هي أبسط صور القضايا ؛ حيث القضية الخلية هي أبسط القضايا ، وهي الوحدة الاولى التي تتألف منها أية عملية فكرية ،^(٢) ، بينما نجد هذا التصور للقضية من الجانب الأرسطي ، نجد الرواقين يصنفون القضايا تصنيفا يخالف التصور الأرسطي المألوف لدينا ، وتقسيمهم للقضايا يرتبط بالموضوع الجزئي المشخص ، حيث القضية هي وعاء النكر ، والفكر يعبر عن الواقع الخارجي .

يصنف الرواقيون القضايا في قسمين كبيرين : القسم الأول ويضعون فيه كل القضايا البسيطة . أما القسم الثاني فيشمل كل أنواع القضايا المركبة . والقضية البسيطة في النسق الرواقي تقابل القضية الذرية في النسق اللوجستيقي ، أما القضية المركبة فتقابل القضية الجزئية في اللوجستيقا المعاصرة ، وبذلك فإن وجهة نظر المنطقة المعاصرين من أمثال رسل وهو ايتهيد من دعاة المذهب اللوجستيقي تتفق وتحليل الرواقين والميغارين لها^(٣) .

أما القضية البسيطة في النسق الرواقي — أي القضية الذرية فهي التي نحمل فيها صفة من الصفات على موضوع من الموضوعات دون حاجة إلى رابطة منطقية .
وللقضية من هذا النوع ثلاثة أنماط :

(1) Mourant, op. cit, p. 76

(2) Cohen & Nagel., An Introduction to Logic, p. 33

(3) Hamlyss., op. cit, p. 69

أولاً : قد يكون الموضوع معيناً definite مشار إليه مثل هذا (١) .

ثانياً : وقد يكون غير معين Indefinite مثل بعضهم .

ثالثاً : أو قد يكون شبه معين Intermediate مثل سقراط .

وأهم ما نلاحظه على هذه الأنواع الثلاثة من القضية البسيطة أن المحمول فيها « هو دائماً فعل أى حدث ، وشئ . يحصل للموضوع » (٢) .

أما القسم الثانى والذى يضعون فيه تصنيفاً للقضايا المركبة ، أو ما يعرف حديثاً بالقضايا الجزئية — التى تعتمد على الثوابت المنطقية — فانه يعتبر بمثابة مجال نصب لوضع الاسس المنطقية للأبحاث الحديثة ، فالقضايا المنطقية عندهم تتميز بأنها « تكاد تكون دائماً قضايا مركبة شرطية : متصلة أو منفصلة » (٣) . ولا شك أن الرواقين قد أدركوا الاسس المنطقية التى تستند اليها هذه القضايا ، وهم فى هذا الصدد قطعوا شوطاً كبيراً وقل أن يصل المماصرين من المناطق إلى حقيقة هذه القضايا ، ويؤكد لنا الدكتور عثمان أمين أن مدام انطوانيت قد « بينت وجوه القرابة بين المنطق الرواقى وبين المنطق الجديد المسمى فى عصرنا لوجستيك إذ أوضحت أن اللوجستيك بمحصره الدائم على التعبير عن الوقائع قد أفصح عن العلاقة المبنية بين نشاط الفكر والوجود الواقع » (٤) .

فالقضية الشرطية المنفصلة « تتألف من قضيتين متناقضتين ، ولا تكون صحيحة

(١) عثمان أمين ، المرجع السابق ذكره ، ص ١٣٢ . والمصطلحات المذكورة من وضعنا .

(٢) نفس المرجع ، نفس الموضع

(٣) المرجع السابق ، ص ١٣٣

(٤) المرجع السابق ، التصدير ، ص ١١

إلا باضطراد التعارض بينها . ولما كانت الشرطية المنفصلة تعبرا مباشرا عن مبدأ عدم التناقض فلها بداهة كاملة مثل ذلك المبدأ ،^(١) ومثلها أما أن يكون الوقت نهارا واما أن يكون ليلا^(٢) . أما القضية الشرطية المتصلة ، فهي تلك التي يمكن أن تؤخذ في نظر الرواقين مثلا لسائر قضايا المنطق ،^(٣) وهذه القضية تقرر أنه ، اذا كان موجودا ما حائزا صفة من الصفات كان بالضرورة حائزا صفة أو صفات أخرى ،^(٤) مثال ذلك اذا طلعت الشمس فالنهار موجود ، ولهذا كان الرواقيون يعتبرون هذه القضايا بمثابة أبسط صور البرهان ، وبها يبدأ نظر المنطق ،^(٥) .

وعموما فانه يمكننا القول بأن الفضل يرجع للرواقين^(٦) في تحويل النظر المنطقي من التصورات على اعتبار أنها كليات ، إلى القضايا أو الاحكام ، فضلا عن أنهم بدأوا في منطقتهم بالقضية الذرية ، وهذا الامر هو ما قبله رسل فيما بعد وهو بصدد وضع النسق المتكامل للوجستيقا ، كما وأن نزوعهم إلى الناحية التجريبية كان بمثابة الاساس الذي بدأ منه المعاصرون ، وعليه فإنهم يستنتجون

(١) نفس المرجع ص ١٢٢

(٢) الأمثلة الواردة في هذا الصدد مأخوذة من كتاب الدكتور عثمان أمين

(٣) المرجع السابق ' ص ١٢٢

(٤) المرجع السابق ' ١٢٢

(٥) المرجع السابق ١٢٤

(٦) ويشير ' دافيد ميتشل . الى أنه رغم ان منطق القضايا قد يحثه المناطقة الرواقين بحثا نسقيا مستفيضا بعد أرسطو ، الا انهم لم يقدروا حق التقدير . ومن ثم كان اكتشافهم ذا تأثير ضئيل على المنطق التقليدي . ولم يدرك المناطقة أهمية منطقهم الا في القرن التاسع عشر .

وقائع يمكن مشاهدتها من وقائع مشاهدة حالياً (١)، كما ويرجع الفضل إليهم في اكتشاف الثوابت المنطقية مما نجده أمراً ضرورياً في قضايا النسق اللوجستي المعاصر .

هاجم الرواقيون المنطق الأرسطي هجوماً عنيفاً خصوصاً من ناحية احتواء القضية الحلية على الحدود الكلية . وذهبوا إلى القول بالحدود الجزئية أو المخصوصة، فزينون الرواقى وكريزيب وغيرهما من الرواقين أكثروا من الكتابة في الأمراض، ومن ثم جاء إلتجاههم التجريبي الذى تعكسه لنا نظريتهم في المعرفة ، وهى النظرية التى يقوم عليها منطقهم .

فهم يقولون أن المعرفة تأتى من الأثر الحاصل عندنا من موضوع خارجى ، ويسمون هذا الأثر صورة Image ، والمعرفة عندهم تتكون من هذه الصورة الآتية من الخارج ثم من القول المعبر عن تلك الصورة ، والذى هو تعبير عنها بكل ما هو فيها من جزئى وشخصى . فالأقوال كلها كما تصورهما الرواقيون مخصصة ، فهم أعداء لكل ما هو كلى لأنهم حسيون، وقد استخدموا اسم الإشارة مثل « هذا » بغية مزيد من الحذر والتحوط وبألا يقعوا فى أى حد كلى .

والمنطق الرواقى من ناحية ثانية لا يكتفى بتسجيل الوقائع الجزئية أو الشخصية أو الذرية على حد تعبير رسل فى قضايا منفردة مبشرة ، بل هو يستنتج من واقعة مشاهدة واقعة أخرى يمكن أن تشاهد ، وذلك بواسطة كلمات مثل « إذا » ، « أو » ، « و » ، « لأن » . . . إلخ . وأهم القضايا التى تهمننا من وجهة نظر المنطق الرياضى المعاصر هى : —

(١) القضية المنفصلة التي تربط واقعتين بكلمة « أو » ، ومثال الرواقين هو
« هي نهار أو هي ليل » .

(٢) القضية المتصلة التي تربط واقعتين بكلمة « و » ، ومثال الرواقين هو
« هي نهار وهي ليل » .

(٣) القضية الشرطية التي تربط بكلمة « إذا » ، واقعتين إحداهما المقدم وهو
الشرط وأخرهما التالى وهو المشروط ومثالهم « إذا هي نهار فهي مضيئة » .

ولقد حاول مؤرخو المنطق رد المنطق الرواقى - رغم إستقلاله - إلى المنطق
الأرسطى فردوا القضايا الرواقية إلى القضايا الخلية . ولكن عندما طبق ليبيتز
العمليات الرياضية كالجمع والضرب فى معالجة الأمور المنطقية ، ثم لما أتضح أن كلمات
مثل « أو » ، « و » ، إنما تشير إلى علاقات بين القضايا الذرية ، وينتج عن ارتباط
القضايا الذرية بتلك الثوابت ما يسميه رسل بالقضايا الجزئية ، وأن هذين النوعين
من القضايا أى الذرية والجزئية يكونان معا القضايا الابتدائية التى هى موضوع
القسم الأول من اللوجستيقا ؛ نقول لما أتضح كل هذا تكشفنا الصلة الوثيقة بين
المنطق الرواقى واللوجستيقا المعاصرة ، الأمر الذى جعل للمنطق الرواقى الصدارة
فى العصر الحديث ، والذى أدى إلى تفوقه على المنطق الأرسطى (١) .

ولقد نهج المدرسيون فى هذا الصدد النهج الأرسطى ؛ فاهتموا بالشكل الخارجى
للقضايا وخصوصا القياس ، كما اهتموا بالمشكلات اللفظية والقياسية ، فتجمد منطق
أرسطو ، وأصبح عقيا مجذبا غير منتج ، الأمر الذى أدى إلى الثورة على هذا المنطق
فى عصر النهضة وفى بداية القرن السابع عشر أى فى بداية العصر الحديث ، وعلى
وجه أكثر تحديدا عند ديكارت .

(١) ثابت الفندى : أصول المنطق الرياضى ص ص ١٢٨ - ١٢٩

رأينا أن أرسطو خصوصا في تحليلاته الأولى كان يهتم بالناحية الصورية ، ويرمز إلى القضية الخلية التي هي القضية البسيطة عنده بالصورة أ هوب ، ولكن رموزه جاءت ناقصة أشد النقص ؛ إذ أنه لم يرمز إلى الثوابت على الإطلاق . ورأينا أن المنطق الرواقى هاجم الحدود الكلية التي تظهر في القضية التحليلية الأرسطية وأشار إلى ضرورة كون حدود القضية جزئى وشخصى .

٣ — ديكارت

أما ديكارت فقد حاول أن يجعل الاستدلالات المنطقية تماكي قبر الامكان الاستدلالات الرياضية ؛ وذلك لما امتازت به هذه الأخيرة من وضوح ودقة فائقتين ، ولكن كيف يتمكن المنطق الصورى من قبول موضوع الرياضة ومنهجها ؟ .^(١)

يقول ديكارت أننا نتمكن من ذلك باستخدام الرموز أولا في المنطق الصورى كما هو الشأن في الرياضة . ولكن استخدام الرموز وحدها ليس هو المهم ، إذ حاول هذه المحاولات كثيرون من قبل منهم أرسطو نفسه والرواقيون وريموندليل Raymond Lulle وغيرهم ، وإنما المهم وهذه هي الخطوة التالية التي تمكن المنطق الصورى من أن يصير يقينا وواضحا ودقيقا كالرياضة - إنما المهم - هو استعمال الرموز استعمالا منهجيا دقيقا طبقا لقواعد محددة تعطينا نتائج يقينية .

وعلى هذا النحو يكون ديكارت قد سعى إلى منهج جديد يستبعد فيه القياس الأرسطى ويستخدم الحدس الذى يعتمد عليه المنهج الرياضى والذى يبدأ من الأفكار الواضحة المتميزة مدركا ما بينها من علاقات فيتقدم من أبسط الحقائق

ويتدرج إلى أعقدها ، ^(١) ويساعده في ذلك الاستنباط ، الذي يوضح كيف تتحد الطبائع البسيطة وعلى أى نحو تتألف بعد أن يتضح ما بينها من علاقات ضرورية وهذا هو طريق التقدم في المعرفة ، ^(٢) .

ومع أن ديكارت يتفق مع أرسطو في ضرورة تحليل ما هو مركب لكي نصل إلى ما هو بسيط إلا أن ثمة نقطتين يختلف فيها ديكارت عن أرسطو :

الأولى : أن القياس الأرسطى أو الاستدلال القياسى لا يؤدي إلى معارف جديدة والأفضل استخدام الاستدلال الرياضى .

والثانية : أن الوحدة الأولى لا تكون قاصرة على القضية الحلية وحدها ذات الموضوع والمحمول ، وإنما على كل قضية لا تحتوى على شيء أكثر مما يكون في عناصرها البسيطة .

٤ — لينتز

أما لينتز فقد سعى ما وسعته الحيلة إلى إيجاد هجاء عام يستخدم فيه المنهج الرياضى ، وينطبق على جميع المعارف والعلوم . وهو يسمى محاولته هذه الهجاء العام *Caracteristique universelle* أحيانا وباللغة العالمية *Langus universelle* أحيانا ثانية ، وبفن التركيب *Art de combinatoire* أحيانا ثالثة ، وبفن الاختراع *Art d'invention* أحيانا رابعة .

وقد نجد أساسا لهذه الفكرة عند أرسطو وريمووندليل وديكارت ، فنحن نعلم أن أرسطو كان يقوم بوضع جدول لكل الحدود المتوسطة في قياسية ويرمز لها ،

(١) هشام أمين : ديكارت ص ١١٢

(٢) نفس المرجع : نفس الموضع .

وما دامت هذه الحدود المتوسطة هي المتوسط الذى تلتقى فيه الحدود السكينة والحدود الصغرى فإنه ينتج أن ترميز مثل هذه الحدود سيوصلنا إلى هجاء عام أو منطق رمزى أو لغة عالمية .

أما ريموند ليل فلعله أول من قال بفكرة العلم الكلى هذه فى القرن الثالث عشر فلقد أشار فى كتاب له أسماه « الفن الأكبر » إلى أننا يمكننا أن نتخيل علما عاما كأساس للعلوم كلها . وهذا العلم العام يشتمل على جميع مبادئ ومعاني العلوم مرموزة برموز الرياضيات ، ويتكون من مجموعها ما يسمى بالهجاء العام الذى نصبح فيه حاسبين لا قياسيين . أما ديكارت فقد ذهب إلى أن الهندسة أو الرياضيات إنما هى ثوب خارجى لرياضة أعلى أسماها العلم الكلى ، وفيها ندرس العلاقات جميعها بأسلوب رياضى ، وهذه الرياضيات الأعلى إنما تأتى عن الرمز للطبائع البسيطة التى نصل إليها بواسطة التحليل .

وجملة آراء هؤلاء مؤداهما أننا إذا استطعنا أن نعبر بوضوح كامل عن كل أفكارنا بالرموز ، كتلك التى نستخدمها فى الحساب مثلا ، فإننا نستطيع السير فى كل العلوم تماما كما نسير فى الحساب . وهذه الرموز ذات الخصائص المعبرة عن أفكارنا سوف تكون لهجة جديدة أو لغة جديدة يمكن استخدامها نطقا وكتابة وفهما . ومن الواضح أننا لو توصلنا إلى تلك اللغة العامة أو الهجاء العام فى جميع المعارف والعلوم فإننا سنصل إلى نفس الدقة والوضوح التى تمتاز بهما الرياضيات ، فى جميع معارفنا وعلومنا .

ولقد كان لينتز يستخدم حروفا أبجدية أو أرقاما أولية ، وهو كان يستخدم الحروف الأبجدية أول الأمر ليعبر بها عن العلاقات والتصورات أما مركبات هذه العلاقات والتصورات فيعبر عنها بحاصل ضرب هذه الحروف ، فهنا ازدواج فى

استخدام الحروف الأبجدية من ناحية والأرقام من ناحية أخرى . فقولنا أرسطو فيلسوف وعالم أو سياسي ، يساوي تعبيرنا الرمزي أرسطو يكون أ و ب أو ح ، وكان لـ لينتز في أحيان أخرى يرمز إلى الأشياء برموز عددية فمثلا والمثال من روث ليدياسو لكي نعبر عن القضية « الإنسان حيوان عامل » علينا أن نفترض أن الرقم ٦ يعبر عن الإنسان والعدد ٢ يعبر عن الحيوان والعدد ٣ يعبر عن عاقل ؛ وبذلك تصبح القضية « الإنسان حيوان عاقل » معادلة تقرر أن $6 = 2 \times 3$ (١).

ومعرفة المركبات لا يتم إلا بتحليلها إلى أجزائها البسيطة المكونة لها بحيث أننا لو أطلقنا على تركيب ما الرمز أ ب ح ، فإننا إذا حللنا ذلك المركب إلى عناصره الأولية وعرفنا الأفكار البسيطة التي تشير إليها الرموز أ ، ب ، ح لاستطعنا أن نتوصل إلى معرفة هذا المركب .

هذا من ناحية تحليل الأفكار إلى بسائطها ؛ والتعبير عن تلك البسائط بالرموز . أما ما يسميه لينتز « بفن التركيب » Art de combinatoire فهو منهج جديد يكمل المنهج التحليلي الأول ، وعن طريقه نستطيع أن نتوصل إلى الاختراعات والاكتشافات . هذا المنهج تقوم فكرته الأساسية على ذكر كل التأليفات أو التركيبات الممكنة لأي فكرة بسيطة ، بحيث يتكون عن ذلك قائمة من الأفكار البسيطة تتوصل إليها عن طريق التأليف ، وتكون متضمنة لكل ما يمكن أن يوجد في العالم من أشياء . فلو عبرنا عن البسائط بالحروف الأبجدية مثلا ثم ربطناها معا كل اثنين معا ، كل ثلاثة معا ، كل أربعة معا ، وهكذا فإننا نحصل على عدد من التأليفات أو التركيبات . ولنفرض أننا أخذنا الحروف أ ، ب ، ح ، د ، هـ لنعبر بها عن خمسة أفكار بسيطة فإننا نستطيع أن نحصل على التأليفات الآتية :

ا	أ ب	أ ب ح	أ ب ح د	أ ب ح د هـ
	أ ج	أ ج د	أ ج د هـ	
	أ د	أ د هـ		
	أ هـ			
ب	ب ح	ب ح د	ب ح د هـ	
	ب د	ب د هـ		
ج	ج د	ج د هـ		
	ح د			
د	د هـ			

فإذا أطلقنا بعد ذلك تسميات على تلك التاليفات كل حسب ما يحتويه من
بساط لكان من السهل علينا معرفة كل محمولات الشيء من مجرد معرفة اسم
هذا الشيء (١).

وقد ترتب على ذلك الهجاء العام أو «فن التركيب» أن توصل ليشتر إلى
أفكار رئيسية أهمها : —

١ — من الممكن إرجاع جمشع التصورات إلى تصورات بسيطة بعملية تشبه
تلك التي نصل بواسطتها إلى المعلومات الأولى للأعداد. ومعنى هذا أننا إذا كنا في

الرياضة نصل بواسطة التحليل إلى المعاملات الأولى للأعداد مثلا ، فإننا نستطيع أيضاً أن نرد تصوراتنا بالتحليل إلى التصورات الأولى البسيطة التي لا يمكن ردها إلى أبسط منها .

٢ — يمكن تأليف كل تصورات المركبة إذا مارتبنا البسائط . وهذه خاصية تتعلق بالتركيب . فبعد أن حللنا التصورات إلى بسائطها ، يمكن — إذا مارتبناها على نحو دقيق — إعادة تركيبها . ومن ثم نحصل على التصورات المركبة .

٣ — لا يوجد إلا عدد قليل من الأفكار البسيطة ، ولكن الكثرة تتولد عنها بفضل فن التركيب .

٤ — يجب الرمز إلى الأفكار البسيطة برموز بسيطة ، وإلى الأفكار المركبة برموز مركبة ، فالرمز المركب سيكون مشيراً للتصور المركب .

٥ — التفكير يتكون من إمالة الأسماء عن كل العلاقات الموجودة بين البسائط (١) .

وعلى هذا النحو يكون لينتز قد استخدم الرموز بدلا من المادة الكثيفة والحساب بدلا من القياس . إلا أن لينتز لم يستطع أن يحقق من برنامج الطويل هذا غير جزء قليل ، ومع ذلك فلقد ارتبطت الأبحاث المنطقية اللاحقة بأبحاث لينتز تمام الارتباط .

ولقد شهد القرن الثامن عشر محاولات عديدة لأقامة المنطق الرياضى فظهرت أبحاث لمبرت Lambert ثم أبحاث هولند Holland وبلوكيه Ploucquet وكاستيون Castillon ، غير أنهم لم يستطيعوا التوصل إلى شيء له أهمية في ميدان المنطق الرياضى .

٥ - ولیم هاملتون

وفي القرن التاسع عشر تقدمت الأبحاث المنطقية الرياضية تقدما ملحوظا فقامت محاولات تكيم المحمول على يد جورج بنام في كتابه *Outline of a new system of logic* ، ولكن ولیم هاملتون هو الذي توسع في هذه النظرية وأعطاهما صورتها الكاملة . فلقد بين هاملتون أن المحمول في القضية يمكن أن تعين ناحيته الكمية كال موضوع سواء بسواء . وتكيم المحمول يعتبر خطوة هامة في سبيل إقامة المنطق الرمزي الذي يحول الكيف إلى الكم ويصنع القضايا في صورة معادلات جبرية رمزية تقربها من القضايا الرياضية ومن هنا فلقد انقسمت القضايا عند هاملتون إلى ثمانية أنواع لا إلى أربعة كما كان الحال في المنطق القديم وهذه الأنواع هي :

- ١ - موجبة الكل كلية مثل كل مثلث هو كل ذي ثلاثة أضلاع ويرمز إليها بالحرف *a* . كل *a* هي كل *b* .
- ٢ - موجبة الكل جزئية مثل كل مثلث هو بعض الأشكال الهندسية ويرمز إليها بالحرف *A* . كل *a* هي بعض *b* .
- ٣ - موجبة الجزء كلية مثل بعض الأشكال الهندسية هو كل مثلث ويرمز إليها بالحرف *y* . بعض *a* هي كل *b* .
- ٤ - موجبة الجزء جزئية مثل بعض الأشكال الهندسية هي بعض المثلثات ويرمز إليها بالحرف *I* . بعض *a* هي بعض *b* .
- ٥ - سالبة الكل كلية مثل لا واحد من المثلثات هو واحد من المربعات ويرمز إليها بالحرف *E* . لا *a* هي كل *b* .

٦ — سالبة الكل جزئية مثل لا واحد من المثلثات هو بعض الأشكال الهندسية المتساوية الأضلاع . ويرمز لها بالحرف n . لا a هي بعض ب .

٧ — سالبة الجزء كلية مثل بعض الحيوان ليس كل الإنسان ويرمز إليها بالحرف o . بعض a ليس كل ب .

٨ — سالبة الجزء جزئية مثل بعض الحيوان ليس بعض الإنسان ويرمز إليها بالحرف w . بعض a ليس بعض ب .

٦ — دي مورجان

ولقد استطاع دي مورجان في عام ١٨٤٧ أن يعبر بالرياضيات عن قوانين المنطق ، واستطاع أن يدخل القوانين والرموز الرياضية في الميدان المنطقي ، كما استطاع أن يكشف عن صور جديدة للقياس وعن أنواع جديدة من القضايا ، ولو أن دي مورجان لم يكن محصورا في نطاق المنطق الارسطاطاليسي لاستطاع أن يقفز بالمنطق خطوة حاسمة ونهائية نحو صيغته الرمزية ، إلا أن إصراره على تعديل المنطق الصوري قد أغفله عن التنبيه إلى علاقات وقوانين ونظريات منطقية لم يكن في مقدور المنطق القديم أن يميّط اللثام عنها .

قام دي مورجان بتقديم تحليل دقيق للرابطة التي تربط بها بين الموضوع والحمول في القضية is وبين أهميتها واستعمالاتها المختلفة ، كما ميز بين الإضافات المتعدية $transitives$ والمنعكسة $Convertibles$ والمتضايقة $Corrélatives$ ، وهو تمييز هام كان له دوره الضخم من التأثير فيما بعد فكان بذلك أول من أرمى دعائم منطق الإضافات الذي توسع فيه رسل كل التوسع فيما بعد (١) .

٧ - جورج بول

يعد جورج بول Boole بحق مؤسس المنطق الرياضي . فقد كان ذا ترعة رياضية منذ صباه ، واهتم بدراسة الرياضيات في صغر شبابه . وتكشف لنا تحليلاته الرياضية عن عبقرية الرياضيات ذات الطابع المنطقي .

ويذهب الباحثون على اختلاف مذاهبهم ونزعاتهم إلى أن كتابه ، قوانين الفكر Laws of Thought - الذي قام بتدوينه عام ١٨٥٤ - يعتبر أعظم عمل قدمه بول ، للفكر المنطقي منذ بداية القرن التاسع عشر حتى عصر فريجه وبيانوا ، وهذا ما جعل رسل يؤكد لنا في أكثر من موضع أن ، التطور الحديث للمنطق الرياضي يؤرخ ابتداء من قوانين الفكر لبول ، (١) الذي يعد فاتحة عصر جديد في تطور الفكر المنطقي في جانبه الرياضي .

حاول بول ، أن يستفيد من دراسته للرياضيات ، التي اشتغل بها وقتاً طويلاً ، فأعمل فكره الرياضي في المنطق ، ومن ثم فقد وقف على حقيقة مفادها أنه يمكن للمنطق أن يتطور جذرياً إذا ما كانت لغته دقيقة ، ومصاغة صياغة غاية في الإحكام والترباط بحيث تسمح للفكر أن يتحرك في إطاراته وأبعاد المنطق مسلحاً بوسيلة فنية قوية تعصمه من الخطأ ، ولهذا فقد حاول ابتكار لغة رمزية تصلح لتعبير بدقة عما أسماه قوانين الفكر ، (٢) ، ولهذا فقد كانت خبرة بول ، الرياضية إلى جانب أعمال الرياضي Wallis خاصة كتابه Institio Logicae (١٦٨٧) وكذلك أعمال لينتز ، العظيمة ، من العوامل الهامة التي ساعدت على نبض تفكيره في الجانب الخاص بالمنطق الرياضي .

(1) Russell, B., Our Knowledge of The External world, PP. 49-50

(2) Stebbing, S., A modern introduction to logic, P. 484

وربما كانت محاولة بول ، في هذا الصدد ، إيذانا بميلاد مرحلة جديدة من مراحل تطور الفكر المنطقي ، ذلك أن الدراسات في مجال المنطق الرياضي لم تحرز أى تقدم منذ عصر « لينتر » ، فيما عدا تلك المحاولة التي قام بها « لامبرت Lambert » ، وهذا ما جعل « ثفن » ، ^(١) Venn يلتقى بتبعية ذلك على كاهل كانط Kant الذي يعتبره مسئولاً بصفة مباشرة عن تأخر الدراسات المنطقية . وعلى هذا الأساس فقد تعين على « بول » أن ينجز جزءاً كبيراً من المنطق الرياضي ، حيث انصب هدفه العام في كتابه « قوانين الفكر » ، على دراسة « وبحث القوانين الأساسية لعمليات العقل التي ينجزها الاستللال » ، ^(٢) من وجهه النظر الرياضية ، وبذا فإن بحثه قد أنصب على المبادئ المنطقية البحتة بما جعل لإتجاه بول هو اتجاه إبناء نسق منطقي رياضي .

ومن بحث « بول » في المنطق ، وجد أن « المنطق يضطلع بنوعين من العلاقات - علاقات بين أشياء ، وعلاقات بين وقائع . أما الوقائع فيعبر عنها بقضايا ، وهذا النوع الأخير من العلاقة ، على الأقل بالنسبة لغرض المنطق ، يمكن أن يحل إلى علاقته بين قضايا » ، ^(٣) . وهذه النقطة بالذات تفسر لنا البدايات الأولى لنظرية حساب القضايا التي ظهرت لدى بول ، فنظرية حساب القضايا في المنطق الرياضي تعتمد على العلاقات القائمة بين القضايا من خلال الثوابت المنطقية Constants Logical ، وهذا ما اهتم به أصحاب المنطق الرياضي في مطلع هذا القرن ، خاصة المنطق الرياضي الانجليزي برتراند رسل .

(1) Venn., Symbolic Logic, P, Xxxii .

(2) Boole, G., Alogical Calculus, ed. in Readings in Logic by Copi, 1964, P. 198

(3) المرجع السابق ، ص ٢٠١

وإذا ما تفحصنا أفكار د بول ، التي قدمها لنا ، لوجدنا أنه - تحت تأثير نزعة الرياضية - زودنا بثلاث أنواع من الرموز أو العلاقات (٤) هي : —

النوع الأول : — ويتمثل في الرموز الحرفية مثل X ، Y ، Z وهذه الرموز تمثل الموضوعات *objects* التي تنصب عليها تصوراتنا ، أو بمعنى أدق ؛ ووفق تعبير نيل (٥) *Kneale* ؛ لتمثل الفصول *Classes* .

النوع الثاني : — يتمثل في تلك الرموز التي وضعها للعمليات الفكرية مثل : $+$ ، $-$ ، \times ، ... والتي يتم عن طريقها اتحاد الأولى في جمل ذات معنى .

النوع الثالث : — ويتمثل في رموز لعلاقة الذاتية *Identity* ، $=$ ، من حيث أنها علاقه أساسية ، ويستخدمها بين رموز فصلين لكي يدل على أن فصلين لها نفس الاعضاء ، (١) وهذا ما جعله يميز بين الفصل (٢) واحتواء

(٤) استنج ' انرجع السابق ، ص ٤٨٥

(5) *Kneale , W., Poole and the Revival of logic , Mind, Vol-Lvii, No. 226, April 1948 ; P. 161*

(١) المرجع السابق ، ص ١٦١

(٢) أثرتنا ترجمة كلمة *Class* باللغة العربية فصل ، لأنها أوثق اتصالاً بالمفهوم الرياضي للمصطلح ، وفي هذا فإنا قد إنتهجنا نهج الاستاذ يوسف كرم في تعريبه للمصطلح بقوله « في المنطق جملة الموضوعات التي تربط بينها صفات مشتركة » ويقال على النوع والجنس على حد سواء . ويمرر الفصل إما بأننا صدق أو المفهوم ، أي أننا قد نعرف نوع الشيء ، الذي هو الفصل أو نوع التصور الذي يدل على الفصل . . في المنطق الرمزي يكتب هذا الاصطلاح هكذا « *Cls* » .

راجع . المنجم الفلسفي ؛ يوسف كرم وآخرون ؛ القاهرة ١٩٦٦ ، ص ١٢٢

الفصل *Class inclusion* ، وعلى هذا الأساس ، فقد صيغ حساب أوجبر الفصول ، لأول مرة بواسطة بول في جبر المنطق ، ^(٢) وهذا ما جعله يعالج مسألة الحكم في القضية من خلال فكرة الفصل .

وقبل أن تتناول نظرية حساب الفصول لدى بول ، يهمننا أن نسجل له موقفاً في غاية الأهمية .

لقد أدرك بول أهمية المنطق الرواقى من وجهة نظر المنطق الرياضى ، وهذه النقطة لم يتناولها أحد من الذين كتبوا عن منطقهم . ذلك أنه يذهب في الحساب المنطقى إلى القول بأنه « حدث للشمس كسوف كلى ، فسرى الكواكب » . هذا النوع من القضايا فى رأى بول ، يعبر عن علاقة بين قضايا أولية - ونحن نعلم أن المناطقة لم يتناولوا المنطق الرواقى بالبحث إلا فى أواخر القرن التاسع عشر وأوائل القرن العشرين . إلا أن بول لم يمتضى فى تحليلاته لمثل هذا النوع من القضايا إلى نهايتها ، وربما جاز لنا أن نقول أنه لو ألقى بول مزيداً من الضوء على المنطق الرواقى ، لتوصل إلى نظرية حساب القضايا فى صورتها النهائية قبل أن تعرف كنظرية بخمسين عاماً على الأقل ، لكنه اعتقاداً منه فى اكتمال فكر أرسطو ، ذهب إلى أن « مقدمات أى حكم منطقى تعبر عن علاقة معطاه بين عناصر معينة ، وأن النتيجة يجب أن تعبر عن علاقة متضمنة بين هذه العناصر أو بين جزء منها » ^(٣) ، وهذا ما جعل رسل ^(٢) يرى فى منطق الرياضى تطوراً للقياس الأرسطى .

(1) AMBRose Lazerowitz., Fundamentals of Symbolic Logic;
PP. 308 - 301

(١) : المرجع السابق . ص ٢٠١

(3) Russell , My : philosophical Development; P. 87

ويمكن لنا أن نقف على بعض نظريات « بول » الهامة في المنطق الرياضي ،
إذا ما حاولنا الربط بين كل من آرائه المعروضة في أول كتاباته والتحليل الرياضي
للمنطق ، *Mathematical Analysis of logic* الذى ظهر فى عام (١٨٤٧)
وأعيد طبعه عام (١٩٤٨) ، والآراء التى طرحها فى قوانين الفكر ، فكلاهما
يكمل الآخر .

يُمَيِّز « بول » بين فكرة الفصل ، واحتواء الفصل ، كما ويعرف لنا الفصل الكلى
Universal Class بأنه فصل كل الأشياء ، ، والفصل الصفري *nullclass* بأنه
« الفصل الذى عضوه لا شئ » . وقد أشار بول إلى الفصل الكلى بالرمز (١) ،
ورمز إلى الفصل الصفري بالرمز (٠) .

وعلى هذا النحو فإنه يمكننا أن نقدم بعض المفاهيم والأفكار الأساسية التى
زودنا بها « بول » فى مجال نظرية حساب الفصول على النحو التالى : —

(١) إذا كان A ، B أى فصلات فإنه إذا قلنا $A = B$ فإن هذا يعنى أن
أعضاء الفصل A متطابقة مع أعضاء الفصل B .

(٢) إذا قلنا أن $A \subseteq B$ فإن معنى هذا أن الفصل A محتوئى فى
الفصل B ، أى أن أعضاء الفصل A هى ذاتها أعضاء الفصل B . فإذا لم يكن
أحد أعضاء الفصل A عضواً فى الفصل B فإنه لن يكون من الصادق أن الفصل
 A محتوئى فى الفصل B .

(٣) إذا كان b ، فرد *Individual* ، A فصل ، فإن قولنا $b \in A$
يعنى أن b ، عضواً فى A .

(٤) أنه فى حالة إحتواء الفصل ؛ فلا بد من التمييز بين الإحتواء *inclusion*
والإحتواء التام *Proper inclusion* ويرمز للإحتواء بالعلامة \subset

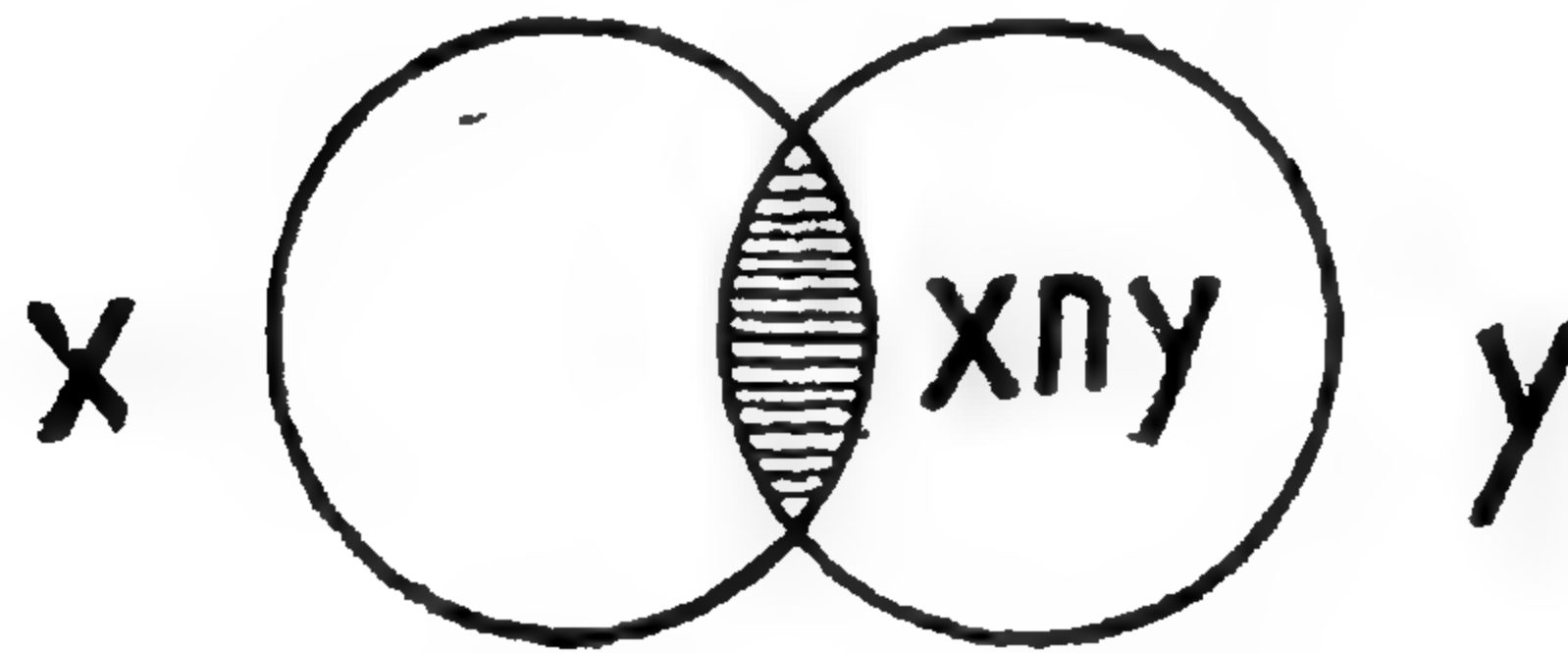
وهناك مجموعة من المفاهيم الأساسية مثل ذاتية الفصل Class Identity واحتواء الفصل . وهذه المفاهيم يمكن وضعها في حدود Terms عضوية الفصل Class membership ، فإذا قلنا .

$$A = B$$

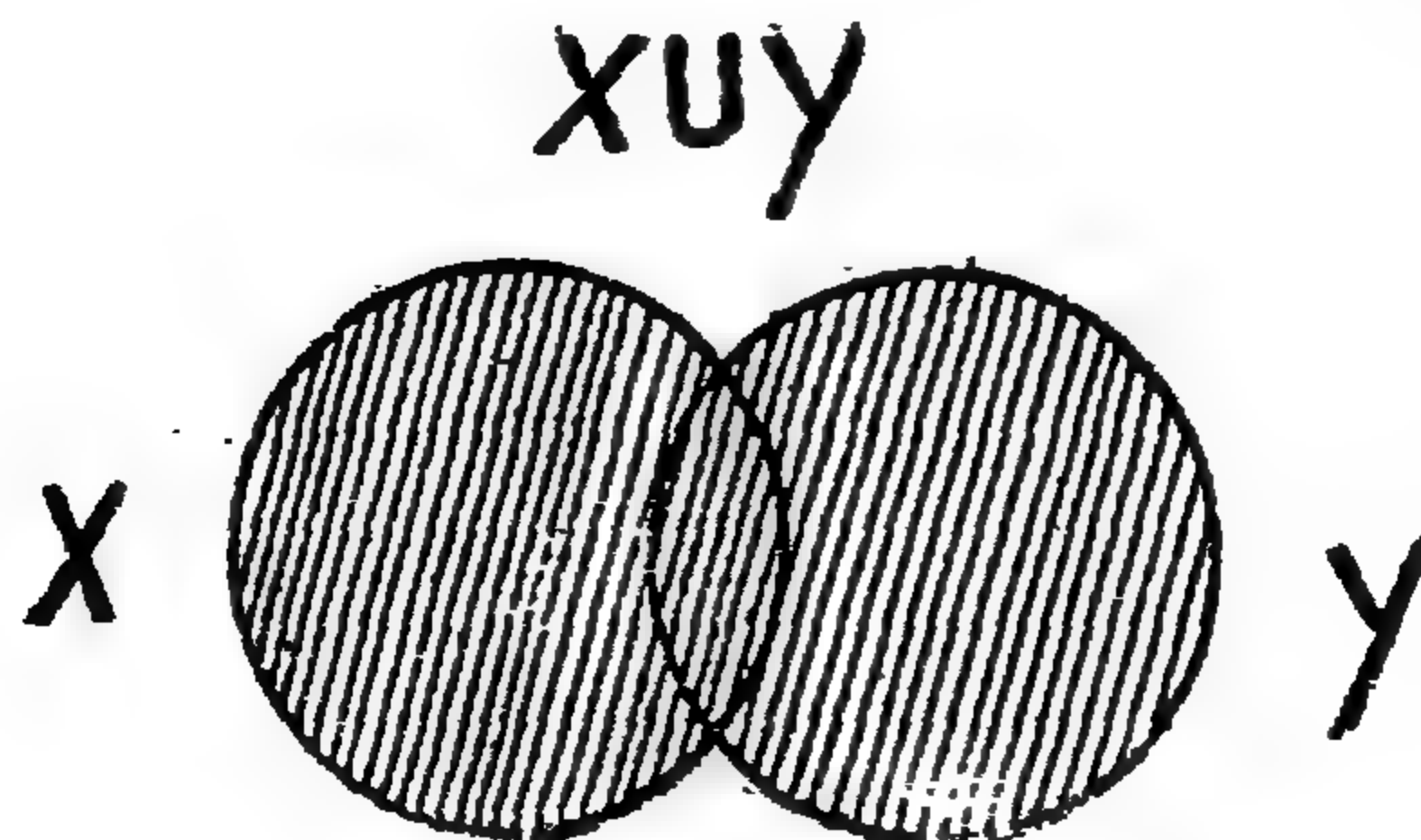
فإن التطابق هنا يكون فقط في حالة ما إذا كانت

$$(x) (x \in A \equiv x \in B)$$

(٦) أنه في حالة تقاطع المجموعتان x و y كما في الشكل



والذي تعبر عنه الصيغة $(x \cap y)$ حيث تشير العلامة \cap إلى التقاطع Intersection . وتقرأ الصيغة $(x \cap y)$ على النحو التالي «X intersection Y»
(٧) أما في حالة إتحاد كل من المجموعتين x و y والذي يعبر عنه الشكل الآتي .



فإن الصيغة $(X \cup Y)$ تعبر عن اتحاد المجموعتين . والعلامة U تشير إلى اتحاد union المجموعتين معا . وتقرأ الصيغة $X \cup Y$ على النحو التالي « $X \cup Y$ » ويمكن لنا تطبيق فكرتي الاتحاد والتقاطع على صورتى قانون التوزيع وقانون التبادل

أولاً : قانون تبادل الحدود The Commutative Law

إذا كان لدينا مجموعتان فرعيتان subsets مثل X , Y لمجموعة كلية (1) universal set فإنه يمكن لنا أن نقول

$$X \cup Y = Y \cup X$$

$$X \cap Y = Y \cap X$$

ثانياً قانون توزيع الحدود The distributive Law

إذا كانت لدينا مجموعتان فرعيتان X , Y لمجموعة كلية (1) فان

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

وكذلك فان

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

وبالنسبة للمجموعة الصفرية null فان

$$X \cup 0 = X$$

أما المجموعة الكلية فإن universal Set

$$X \cap 1 = X$$

وما يمكن أن نلاحظه يتمثل في أن أفكار «جورج بول» تجد تطبيقا واسعا في مجال الجبر algebra. وقد حاول بول في هذا الصدد أن يؤسس ما أسماه بجبر المنطق algebra of logic بالإستناد إلى مجموعة العلاقات الرياضية والتي وضعها في صدر مجموعة الأفكار الرياضية الأساسية في مجال المنطق مثل (+) ، (.) ، ...

والقوانين السابقة يمكن البرهنة عليها من وجهة نظرجبر المنطق لبول ومن ثم فإننا سنكتفي بأحدى هذه الصور وهي صورتى قانون التوزيع وقانون التبادل لنقف على كيفية معالجة بول لجبر المنطق .

قانون التوزيع

بأخذ قانون توزيع الحدود الصورة الآتية وفقا لنظرية جبر المنطق

$$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$$

$$1 - X \cdot (Y + X) = X \cdot Y + X \cdot X$$

$$2 - X \cdot (Y + Y) = X \cdot Y + X \cdot Y$$

$$3 - Y \cdot (Y + X) = Y \cdot Y + X \cdot X$$

$$4 - Y \cdot (Y + Y) = Y \cdot Y + Y \cdot Y$$

$$5 - X \cdot (X + X) = X \cdot X + X \cdot X$$

$$6 - Y \cdot (X + X) = Y \cdot X + Y \cdot X$$

$$7 - X \cdot (X + Y) = X \cdot X + X \cdot Y$$

$$8 - Y \cdot (X + Y) = X \cdot X + Y \cdot Y$$

نلاحظ على هذه المجموعة من الاحتمالات ما يلي :

أولاً : — أن كلا من الاحتمالين (١) ، (٧) متماثلين من ناحية الصورة

ثانياً : — أن الاحتمالين (٣) ، (٨) متماثلين أيضاً

قانون التبادل

وصورة هذا القانون هي

$$X + Y \cdot Z = X \cdot Y + X \cdot Z$$

من هذه الصورة يمكن أن نستنتج الاحتمالات الآتية

$$1 - X + Y \cdot X = (X + Y) \cdot (X + X)$$

$$2 = X + Y \cdot Y = (X + Y) \cdot (X + Y)$$

$$3 - Y + Y \cdot X = (Y + Y) \cdot (Y + X)$$

$$4 - Y + Y \cdot Y = (Y + Y) \cdot (Y + Y)$$

$$5 - X + X \cdot X = (X + X) \cdot (X + X)$$

$$6 - Y + X \cdot X = (Y + Y) \cdot (Y + X)$$

$$7 - X + X \cdot Y = (X + X) \cdot (X + Y)$$

$$8 - Y + X \cdot Y = (Y + X) \cdot (Y + Y)$$

نلاحظ أيضاً على هذه الاحتمالات الثانية أن كلا من الحالتين (١) ، (٧)

متماثلتين ، كما أن الحالتين (٣) ، (٨) متماثلتين أيضاً .

تلك هي بعض الأفكار الأساسية التي تضمنتها آراء بول في المنطق الرياضي، خاصة جبر المنطق، والتي تابع تطويرها الرياضي الألماني شرويدر متابعا لبول في نزعة الجبرية في المنطق.

وبما لا شك فيه أن آراء بول كانت بمثابة حلقة عامة من حلقات تطور الفكر المنطقي في جاته الرياضي كما سبق أن ذكرنا، أتاح للمناطق المعاصرين امكانه معالجة وتطوير أبحاث المنطق بما وضعه - في أحدث صوره، من تطوير جبري ورمزي لمسائل المنطق.

٨ - بيانو

أما بيانو ^(١) Peano فيكشف لنا فكره عن عبقرية أصيلة، لنا أمتازت به تحليلاته الرياضية والمنطقية من عمق. وقد تأق بيانو إلى دراسة المنطق عن

(١) هو جيوسيب بيانو Giuseppe Peano العالم الرياضي والمنطقي الإيطالي. ولد في ٢٧ أغسطس ١٨٥٨ واهتم بدراسة أسس الرياضيات وأصولها، وعمل على تطوير لغة المنطق الصوري وأبحاثه المختلفة. وقد شغل كرسى الاستاذية في حساب اللامتناهي infinitesimal Calculus بجامعة تورين في عام ١٨٩٠ وقام بتدريسه في الأكاديمية العسكرية فيما بين الأعوام (١٨٧٧ - ١٩٠١). ومن أهم كتاباته «الصوغ الرياضية» Formulaire de mathématique التي اشترك في إعدادها مع مجموعة من تلامذته فيما بين الأعوام (١٨٩٤ - ١٩٠٨) والتي يعرض فيه المفاهيم والمسلات الأساسية في أصول الرياضيات والتي أصبح السند الأساسي لرسائل فيما بعد حين قام بتدوين أصول الرياضيات (١٩٠٣) ثم «مبادئ الرياضيات» بالاشتراك مع هوايتهد (١٩١٠ - ١٩١٣). وقد توفي بيانو في ٢٠ أبريل ١٩٣٢.

الرياضيات التي أهتم بفحص أسسها ومبادئها محاولاً صياغتها صياغة جديدة تلائم التطورات العلمية والكشف الرياضية الحديثة .

والباحثون في مجال المنطق الرياضي ، لم يتبينوا أهمية بيانو وعظمة فكره ، إلا بعد أن كشف رسل النقاب عن أعماله الهامة في مجال المنطق البحت والمنطق الرياضي وفلسفة الرياضيات ، وذلك بعد أن التقى به في مؤتمر باريس الرياضي الذي عقد في عام (١٩٠٠) وحضره رسل مع أستاذه وزميله هوايتهد whitehead .

أراد بيانو - تحت تأثير الرياضيات - أن يضع نظاماً دقيقاً ومحكماً للمنطق من خلال مصطلحاته الرمزية ، فضلاً عن محاولته التي قام بها لرد الرياضيات إلى أصول منطقية بحتة Pure logical axioms ، تلك المحاولة التي اعتبرت بمثابة التكأة التي انطلق منها أصول الرياضيات ، (١٩٠٣) لرسل ، ثم مبادئ الرياضيات ، Principia Mathematica لرسل هوايتهد .

والحقيقة أن أعماله بيانو المنطقية ، أتاحته أن ينطلق في حركته المنطقية إلى أبعاد التجديد المنطقي الكامل ، فنجده يتناول الكثير من أفكار ومبادئ المنطق التقليدي بالبحث والتحقيق ، من ناحية ؛ فضلاً عن أنه دفع إلى التصور المنطقي بعض المفاهيم الرياضية والمنطقية الحديثة مما أدى إلى تدعيم الاتجاه اللوجستي المعاصر .

ومن ثم فإنه يمكننا أن نحال فكر بيانو من زوايا ثلاث مختلفة ، الزوايا الأولى وتمثل في موقفه من المنطق الصوري بمعناه التقليدي ومعالجته لنسق القضايا الأساسية في المنطق . أما الثانية فتتصب على موقفه العام من المنطق الرياضي وأهمية هذا الموقف بالنسبة للمعاصرين . والموقف الثالث يتضمن عرضاً لموقف بيانو من أصول الرياضيات ومجهوداته في هذا الصدد .

أولاً : موقف بيانو من المنطق الصوري التقليدي

نحن نعلم أن المنطق الصوري الأرسطي ، ظل الشكل الرسمي للفكر المنطقي منذ أرسطو وحتى أواخر القرن التاسع عشر ، ولم تكتب لمحاولات الخروج على المنطق الأرسطي ، النجاح إلا في عصرى بيانو وفريجة . فلم تكن الاعتبارات التى قادت لينتز وجورج بول إلى حركة التجديد المنطقي وادخال نمط من انماط الفكر الرياضى إلى ميدان المنطق دون محاولة الذهاب إلى ما وراء الذق المنطقي التقليدى .

لكنه يمكننا أن نسجل لبيانو أول موقف منطقي حاد من المنطق الصوري الأرسطي ، ذلك أن موقفه العام من معالجة الأسس المنطقية التى يستند إليها التصور التقليدى قد أتاح له الفرصة لتطوير المنطق الصوري الحديث أو ما يسمى بالمنطق الرياضى .

ومنع هذا فلم ينتبه الباحثون فى ميدان المنطق إلى أهمية موقف بيانو من المنطق إلا بعد أن التى رسل ضوءاً على مجهودات بيانو فى هذا المضمار ، فى مؤلفه الذى أصدره فى عام (١٩٠٣) بعد مؤتمر باريس الرياضى ، الذى يحمل عنوان « أصول الرياضيات Principles of Mathematics » . أفرد رسل جزءاً كبيراً فى هذا المؤلف لمعالجة موقف بيانو المنطقي ، والحقيقة أن بيانو ، كما يذهب إلى ذلك رسل ، يميز تمييزاً حاسماً بين القضية الخلية والتى صورتها «سقراط» ، والقضية تعسامة ذات الصورة «كل الاغريق فانون» . ونحن نعلم أن المنطق التقليدى لا يضع تمييزاً بين صور القضايا الخلية الأربعة . ذلك أن أرسطو كما سبق أن أشرنا إلى ذلك ونحن بصدد معالجة موقفه من المنطق ، قد انتهى إلى اعتبار صور القضايا الأربعة هى بمثابة أبسط الصور والتى تعد أساساً للفكر والنظر المنطقي .

لكن دقة بيان المنطقية ومهارته الرياضية، تمثلت في التمييز الحاسم والدقيق بين كل من هاتين الصورتين فبينما أفترض المنطق التقليدي أن القضية الجزئية والقضية الكلية تنطويان على تقرير وجودي لأفراد الموضوع^(١)، ذهب بيانو، إلى أن الصورتين متميزتين، وقد أغفل المنطق التقليدي التمييز بينهما.

فالقضية التي نقرر فيها أن « سترأى قط فان »، إنما هي في واقع الأمر تنسب محولا لموضوع مسمى^(٢) وهي ما يمكن أن نسميه بالقضية الحيلة Categorical أو Proposition القضية ذات صورة الموضوع والمحمول، Subject-predicate، على حين أن القضية التي تقول فيها أن « كل الإغريق قانونا » هي في حد ذاتها قضية تعبر عن علاقة بين محولين « إغريق »، « قانون »، أو هي تلك التي تعبر عن علاقة بين قضيتين. فكلية « إغريق »، في هذه القضية هي محمول أيضا، شأنها في ذلك شأن كلمة « قانون »، تماما. وهذه القضية يمكن لنا تفسيرها على النحو التالي .

« إذا كان س إغريق ، فإن س قانون »

أي أنه إذا ما حملنا صفة الإغريق على س فانه لابد لنا وأن نحمل عليه أيضا صفة كونه ذن .

وعلى هذا الأساس فإن القضية العامة أو القضية والتي نطرح اليها أصحاب المنطق التقليدي على أنها قضية حملية، إنما هي في حقيقتها تعبر عن علاقة بين قضيتين، أو بتعبير أدق هي قضية شرطية متصلة Hypothetical Conjunction في صورة

تضمن implication .

(1) Moutant , I. , Formal logic , P. 212

(2) Russell , B , My Philosophical development, P. 66

وإدراكه بياناً ، لهذا التمييز الدقيق بين كل من صورتى القضية الكلية والقضية العامة ، هو الذى اتاح للناطق المحدثين ، أن يفترضوا أن القضية الجزئية وحدها ، هى التى تتضمن تقريراً وجودياً لأفراد الموضوع ، على حين أن القضية الكلية أى العامة لا تتضمن أى تقرير وجودى لأفراد الموضوع (٢) .

وبما لاشك فيه أن رسال قد وقف على تمييز بيانو هذا بصورة واضحة واستفاد منه فى معالجته لأسس المنطق التقليدى . ومع هذا فلم يكن لرسال فضل السبق فى هذا التمييز ، بل سبقه إليه برادلى فى « مبادئ المنطق » ، لكن برادلى لم يتمكن من الاستفادة من كشفه هذا ، بينما تمكن رسال من تطوير المنطق فى جانب الرياضى من خلال تمييزه هذا .

ثانياً موقف بيانو من المنطق الحديث (١)

إذا كان بيانو قد عاجل لنا جانباً هاماً من جوانب المنطق التقليدى فإنه زودنا فى الجزء الخاص بالمنطق الحديث ببعض التصورات الهامة التى دفعت بعجلة التطور فى المنطق . وقد قدم لنا رسال موقف بيانو كما قلنا كاملاً فى « أصول الرياضيات » ، ثم تناوله بعد ذلك فى « مقدمة لفلسفة الرياضة » ، وقد اعتمدت كل الكتابات المنطقية التى جاءت بعد « الأصول » ، على أفكار رسال عن منطق بيانو ، ومن ثم فإننا سنعتمد على عرض رسال لأفكار بيانو فى هذا الصدد .

وضع بيانو خمسة مبادئ أساسية يعتمد عليها النسق الاستنباطى فى المنطق وهذه المبادئ الخمسة هى :

(٢) مورانت ، المرح السابق ، ص ٩١

(١) راجع : Russell. B., The Principles of Mathematics

(١) مبدأ التبسيط

وفيه يقرر أن الحكم الاقتراعي لقضيتين يتضمن الحكم بأولى القضيتين . أى أنه إذا كان لدينا قضيتين ل ، م ، فانه إذا كانت ل تتضمن م ، وكانت م تتضمن م فإن ل م تتضمن ل .

(٢) مبدأ القياس

إذا كان ل تتضمن م ، م تتضمن م . ، فإن ل تتضمن م .

(٣) قاعدة الاستيراد

إذا كانت م تتضمن م ، م تتضمن م ، وكانت ل تتضمن أن م تتضمن م ، فإن ل م تتضمن م .

(٤) قاعدة التصدير

إذا كانت ل تتضمن ل ، كانت م تتضمن م ، ومن ثم فانه إذا كانت ل م تتضمن م ، فإن ل تتضمن أن م تتضمن م .

(٥) قاعدة التركيب

وتقرر هذه القاعدة أن كل قضية تتضمن قضيتين ، فإن القضيتين معا يتجان عن القضية الأصلية . فاذا كانت ل تتضمن م ، وكانت ل تتضمن م ، فإن ل تتضمن م .

لكن بيانو لم يقف عن وضع هذه المبادئ أو القواعد الأساسية للامتنباط بل تعدى هذه الخطوات إلى تناول نظرية الفصول بالبحث فكان أول من رمز إلى

الفرد والفصل الذى ينتمى إليه بالرمز ع ، وقد كان تمييزه هذا بمثابة خطوة جادة نحو التمييز بين علاقة الفرد بالفصل وعلاقة الكل بالجزء بين الفصول ، وهذا ما جعل رسل^(١) يشيد بتمييزه هذا الذى أزال ما اكتنف الخطأ الذى أصاب المنطق التقليدى بين هذين النوعين من العلاقات ، فالفرق بينها أسلمى تماما كالفرق بين علاقة الفرد بالنوع وعلاقة النوع بالجنس ، كما وقد أتاح له الفرصة بأن يؤكد لنا ، الفصل الذى يتكون من عضو واحد ليس متطابقا مع هذا العضو ،^(٢) . ويعتمد النسق الاستنباطى الذى قدمه لنا بيانو على مجموعته أساسية من اللامعرفات والى تدخل ضمن الجهاز الأساسى للنسق الاستنباطى وهى :

١ - الفصل .

٢ - علاقة الفرد بالفصل الذى هو عضو فيه .

٣ - فكرة الحد .

٤ - التضمن الصورى

٥ - إثبات قضيتين معا

٦ - فكره التعريف

٧ - سلب القضية .

ولم إلى جانب هذه المجموعة من اللامعرفات وضع لنا مجموعة من القضايا الأصلية^(١)

التي اعتبرها كبداهيات وهى : —

(١) برتراند رسل ، أصول الرياضيات ٢ بند ٢١

Russeli, B., My Philosophical Development, P. 67

(١) برتراند رسل ، أصول الرياضيات . بند ٢٢

١ - اذا كانت \mathcal{S} ترمز إلى الفصل ، \mathcal{U} ، \mathcal{L} ترمز ان لعضو يتبعها في الفصل فإن \mathcal{U} هي \mathcal{S} ، \mathcal{L} هي \mathcal{S} ، أي أن \mathcal{K} من \mathcal{U} ، \mathcal{L} يتبعها إلى الفصل \mathcal{S} .

٢ - اذا كان \mathcal{S} ، \mathcal{S} فصلان ، فانه اذا قلنا \mathcal{K} من \mathcal{S} هي \mathcal{S} ، يعني أن \mathcal{S} هي \mathcal{U} تتضمن أن \mathcal{S} هي \mathcal{L} .

٣ - اذا كان \mathcal{S} ، \mathcal{S} ترمزان إلى فصول ، فان حاصل الضرب المنطقي لهذا يتكون من الأفراد التي هي أعضاء في الفصلين \mathcal{S} ، \mathcal{S} ، أي في الفصل \mathcal{S} .

٤ - أن الفصل الصفري هو \mathcal{K} حاصل ضرب أي فصل في سلبه ، (١) . أو هو فصل الحدود التي تدخل في كل فصل . والفصل الصفري إذن هو فصل الحدود التي تدخل في كل فصل . ورغم أن يبانو قد ميزنا بوضوح فكرة الفصل الصفري إلا أن موقفه يكتنفه بعض الغموض لأنه على حد قول رسل (٢) يوحد بين الفصل و الفصل النصور ، وهذا ما أفضى إلى توحيديه بين تساوي الفصول المشتملة على نفس الحدود ، وبين تطابقها ، وهذا أمر غير مشروع اذا ما اعتبرنا الفصل ، فصل تصور .

وربما كان أهم نقد وجهة رسل (٢) إلى الجهاز الاستنباطي للمنطقي لبيانو يتمثل في توحيد بيانو بين كل من \mathcal{K} التضمن الصوري والتضمن المادي ، بينما وجد رسل أنه من الضروري التمييز بينهما تماما ، وقد كانت تلك هي مهمة رسل الأساسية في جهاز الاستنباط الأساسي لمبادئ الرياضيات .

(١) المرجع السابق ، بتد ٣٦

(٢) المرجع السابق ، بتد ٦٩

(٣) المرجع السابق ، بتد ٣٢ . راجع أيضا نظرية حساب القضايا في هذا المؤلف .

ثالثاً : موقف بيانو من فلسفة الرياضيات

لاشك ان بيانو اهتم بصفة خاصة بأصول الرياضيات التي شغل بتأسيسها فترة طويلة ، وهذا ما جعله يحيل كرسى الاستاذية في «حساب اللامتناهى» بجامعة تورين . وقد أشاد رسل بموقفه في « مقدمة لفلسفة الرياضية » ، (١٩١٩) .

ومن ثم فانتنا سنحاول ونحن بصدد عرض موقف بيانو ، أن نقدم بعضاً من الأفكار الأساسية التي تعد نقطة بداية في أصول الرياضيات ، من خلال ما كتبه رسل عنه (١) .

النقطة الأساسية التي يبدأ بها البحث في فلسفة الرياضيات واصولها تتمثل في محاولة الوصول إلى أقل عدد ممكن من الأفكار والتعاريف الأساسية التي تعتبر بمثابة أصول الاشتقاق ، بحيث تسمح لنا باشتقاق أو استنباط deduce الرياضيات بأسرها منها ، وبمعنى آخر يدور البحث حول الأسس المنطقية Logical basis للرياضيات . وقد إضطلع بهذه المهمة في مبدأ الأمر ، بيانو ، ثم أمكن رد الرياضيات بأسرها إلى المنطق في « مبادئ الرياضيات » ، لرسل وهو يتهد .

وضع بيانو مجموعتين من أصول الاشتقاق ، تتضمن المجموعة الأولى منها ثلاثة أفكار ابتدائية Primitive Ideas هما :

١ - الصفر « ٠ »

٢ - العدد Number

٣ - التالي Successor

(1) Russell, B., Introduction to Mathematical Philosophy, ch.

i, ch III

أما المجموعة الثانية فتشتمل على خمس قضايا ابتدائية Primitive Propositions :
 ١ - أن الصفر عدد .
 ٢ - أن تالي أي عدد هو عدد .
 ٣ - ليس لعددین نفس التالی .
 ٤ - أن الصفر ليس تالی لأي عدد .
 ٥ - أن أي خاصية Property من خواص الصفر هي بالضرورة خاصة بجميع الأعداد .

انه إذا ما نظرنا في مجموعتي أصول الاشتقاق التي وضعها بيانو ، لوجدنا أنه يميز تمييزاً واضحاً بين كل من متسلسلة الأعداد الصحيحة ومتسلسلة الأعداد الطبيعية (١) .
 لكن كيف يمكن اشتقاق نظرية الأعداد الطبيعية من الأصول التي وضعها بيانو واعتبرها بمثابة أصول الاشتقاق ؟

البرهان على هذا يسير وفق الخطوات التالية .

بواسطة القضية الابتدائية رقم (٢) والتي تنص على أن تالي أي عدد هو عدد ، فإن العدد (١) هو تالي الصفر ، العدد (٢) هو تالي الواحد ، والعدد ٣ هو تالي العدد ٢ ، والعدد (٣ + ١) هو تالي العدد ٣ . . . الخ (١)

(١) تبدأ متسلسلة الأعداد الصحيحة بالأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، الخ . أما متسلسلة الأعداد الطبيعية ، وهي ما يبدأ به الرياضيون فهي ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ ، الخ . ويؤكد رسل أن إضافة الصفر ، إنما هي إضافة حديثة ، لأنه لو تسنى للقائماء معرفته أن الصفر عدد لأمكن تطوير الرياضيات إلى أبعد مما هي عليه الآن .

راجع : رسل . « مقدمة لفلسفة الرياضيات » ص ٣

رقم (٣) والتي تنص على أنه « ليس لعددین نفس التالی ، فانه من الواضح أننا لم نصل فی خطوتنا السابقة إلى تالی واحد لعددین ————— ← (٢) وبواسطة القضية رقم (٤) والتي تنص على أن « الصفر ليس تالی أى عدد ، يتضح لنا أننا فی طريقة البرهان رقم (١) لم نصل إلى الصفر كتالی لأى عدد ← (٣) .

∴ من (١) ، (٢) ، (٣) يمكن أن نصل فی البرهان إلى ما لا نهاية وتصبح المتسلسلة على النحو التالی :

$$0, 1, 2, 3, \dots, v, v+1, v+2, \dots, \infty \quad (١)$$

إلا أن برهان يانو ، على هذا النحو ، لقی كثيراً من النقد على یدی رسل الذى يعتبره موقفاً أولياً فی الإشتقاق وليس نهائياً فی الرد ، لان كل من « الصفر » ، « العدد » ، « التالی » ، تقبل عدداً لانهائياً من التفسیرات المختلفة .

ورغم أن يانو قد وضع لنا الأفكار والقضايا الابتدائية التى تساعدنا على إشتقاق الرياضیات بأسرها من المنطق ، إلا أنه لم يتمكن من رد الرياضیات إلى المنطق بصفة نهائية ، وقد كانت تلك مهمة رسل وهو ایتهد فی مبادئ الرياضیات ، بحيث أضحت الرياضیات بأسرها منطق ، وبات من المتعذر على الذهن التحلیلی أن یتبین أين ینتهى المنطق وأین تبدأ الرياضیات .

(١) العلامة « ∞ » ترمز إلى اللانهاية ، أى أننا نسير فی متسلسلة إلى ما لا نهاية له من الأعداد .

٩ - فريجة والاتجاه اللوجستيقي

أما إذا انتقلنا إلى فريجه (١) وبحسنا موقفه من المنطق بصفة عامة ، والمنطق الرياضي بوجه خاص ، لوجدنا أنفسنا أمام عقلية ضخمة تعبر بحق عن أصالة الروح الجرمانية منهجا وموضوعا . فهو سليل ليدتز وكانط وهيجل في الدقة وعظمة البناء . وقف على أعمال السابقين عليه واستوعب نظرياتهم وآراءهم ، فنقد بعضها وأضاف إلى البعض الآخر إضافات جديدة ، وهذا ما حدا بالباحثين على اختلاف اتجاهاتهم أن يعتبروه بحق مؤسس المنطق الحديث (٢) ، بل إننا نجد كريستيان ثيل Christian Thiel ؛ وهو من أئمه الباحثين في فكر فريجة ، يذهب إلى أن فريجة لم يترك في المنطق من ورائه شيئا ليقوله أحد .

(١) جوتلوب فريجه Gottlob Frege (١٨٤٨ - ١٩٢٥) من أكبر الرياضيين الألمان في النصف الثاني من القرن التاسع عشر وأوائل القرن العشرين . إمتاز بعقلية رياضية منطقية واضطلع بتطوير جزء كبير من أبحاث المنطق الرياضي خاصة فيما عرف بالذهب اللوجستيقي الذي تبلور في صورته النهائية في « مباني الرياضيات » Principia Mathematica (١٩١٠ - ١٩١٣) الذي اشترك فيه رسل وهو ايتهد . ومن أم أبحاث فريجه « أسس الحساب » Die Grundlagen der Arithmetik (١٨٤٨) ، « الداله والتصور » Function und Begriff (١٨٩١) و « القوانين الأساسية لعلم الحساب » (١٨٩٣) Grundgesetze der Arithme و « الفكر : بحث منطق » (١٩١٨ - ١٩١٩) Der Gedanke : Eine Logische untersuchung . هذا إلى جانب العديد من المؤلفات الأخرى والتي يتوجها جميعا كتابه الأشهب في « التصورات » (١٨٧٩) Begriffsschrift .

(2) Thiel, Christian, Sense and Reference in Frege's Logic, P.8
ونحن نعتبر مؤلف « ثيل » هذا إلى جانب ما كتبه رسل في الملحق الخاص بأصول الرياضيات من فريجه ، من المراجع الأساسية للوقوف على موقف فريجه من أبحاث المنطق والرياضيات .

والحقيقة أن فريجة يعتبر حلقة هامة من حلقات التطور في تاريخ المنطق والرياضيات على سواء ، رغم أن الباحثين من المنطقة والرياضيين لم ينتبهوا إلى عبقريته وأصالته إلا بعد أن كشف رسل النقاب عن جوانب فكره في الملحق الخاص الذي ذيل به كتابة الأشم ، أصول الرياضيات ، (١٩٠٣) حيث تناول فكر فريجة من حيث المنهج والموضوع ونقاط الأصالة والنسق الاستنباطي ، وتصحيحة لبعض المواضع في المنطق الصوري الأرسطي .

ويذنب أن تشير إلى أن معظم الباحثين ، وهم بصدد حركة التأريخ للمنطق الحديث لم يهتموا بفريجة وأبحاثه ، الأمر الذي أفضى بالرياضيين إلى إهماله بالتالي . لكن بعد أن قدمه رسل للمفكرين ، وبعد أن نقل وماكس بلاك ، Max Black أكثر أعماله من الألمانية إلى الإنجليزية ، أضحت أعمال فريجة سهلة ويسيرة إلى حد كبير . ومع هذا فقد تطلب عرض منهج فريجة ودراساته ، تحليلاً وتركيباً ومقارنة ، سنوات طويلة ، كان حصياتها بحث أصيل للمنطق الرياضي ، كرسيتيان ثيل ، .

لقد بلغت أبحاث فريجة المنطقية أوجها في وقت وقف فيه المنطقة في مفترق الطرق بين التقليدية والعلمية ، فلا الرياضيون قادرون على تخطي النسق المنطقي التقليدي ، ولا التقليديون قادرون على تجاوز الأصل الأرسطي إلى ما هو جديد ، اللهم إلا في مواضع طفيفة . وما يؤكد هذا لأول وهلة ، أن فشل الإجماعين معا في تخطي المنحنى الحرج إلى نقطة الانقلاب Zero Point في المنطق ، إنما يرجع أساساً إلى سيطرة المنطق المثالي ، بزعمه برادلي ، آنذاك على دوائر الفكر المنطقي .

حمل فريجة الدعوة إلى الاتجاه اللوجستي بكل وضوح في كتابه والتصورات ، (١٨٧٩) حيث تمكن من خلال اتجاهه الجديد في المنطق

والرياضيات معا ، من أن يزود أجيال المناطق والرياضيين بأربعة تصورات أساسية :

١ — تصوره لإطار نظرية حساب القضايا .

٢ — تصوره لفكرة دالة القضية .

٣ — تصوره لفكرة الدور quantifier واستخدامها استخداما حديثا بحيث أصبحت بالاضافة إلى فكرة دالة القضية تكون التصور الاساسى لنظرية خطاب المحمول .

٤ — التحليل المنطقي للبرهان عن طريق الإستقراء الرياضى باستخدام فكرة الفصل Class .

ولكننا فى عرضنا لموقف فريجة سنركز على موضوعين أساسيين : الاول ؛ موقف فريجة من أسس المنطق الصورى وأبحاثه ، الثانى ؛ موقفه من أسس المنطق الاستنباطى ونظرية حساب القضايا .

أولا : موقف فريجة من أسس المنطق الصورى وأبحاثه

نعلم من دراستنا لتاريخ المنطق أن أصحاب المنطق التقليدى والمشايخين للزعة الارسطية ، والتقليديون من المناطق حصروا متنا أبحاثهم فى المنطق فى القضية ذات صورة الموضوع - المحمول ، ومن ثم فقد رأوا أن كل قضية تشتمل بالضرورة على حدين مرتبطين بفعل الكينونة (To Be) . فصورة القضية «سقراط إنسان» تنحل بالضرورة إلى ثلاث مكونات؛

١ — الموضوع «سقراط» ،

٢ — المحمول «إنسان» ،

٣ - الرابطة (١) Copula ، بين الموضوع والمحمول ، « يكون » .

وقد حاول التقليديون رد الصور الأخرى للقضايا إلى صورة القضية الحلية ، ولم يتبينوا أن هناك ثمة فروق جوهرية بين كل من القضية الحلية والقضية العامة مثلا . لكن فريجة استطاع بدقة تحليلاته المنطقية أن يكشف لأول مرة في تاريخ المنطق تميز صورة القضية الحلية من القضية العامة (٣) . ذلك لأننا في القضية الحلية نقرر assert ، أما في القضية العامة مثل قولنا « كل إنسان فان » ، فإننا لا نقرر الوجود لأفراد الموضوع ، بل نكون بصدد الحكم judgement على كل أفراد الموضوع بالقضاء ، ومن ثم فإن القضية « كل إنسان فان » تفسر على النحو التالي « إذا كان س إنسان فإن هذا يتضمن بالضرورة أن س فان » . من هنا توصل فريجة إلى نقطتين في غاية الأهمية بالنسبة لأبحاث المنطق ، الأولى : أن صورة القضية العامة في جوهرها إنما هي شرطية متصلة ، والثانية : أن هناك تمييز حاسم بين التقرير assertion والحكم . وهذا ما جعله يميز بين محتوى content الحكم وتقريره . ولذا وجدنا رسل يؤكد لنا أن فريجة يميز بين ثلاثة عناصر .

(1) Stebbing, S., A Modern Introduction to logic, P. 34.

(٢) صورة هذه القضية في اللغة الانجليزية « Socrates is aman » . الرابطة بين الموضوع والمحمول هنا يعبر عنها بفعل الكينونة « is » . وهي لا تظهر في اللغة العربية إلا بصورة ضمنية . لمزيد من التفصيل في معرفة المعنى الذي تستخدم به الرابطة . يرجع إلى كتاب « الفلسفة ومباحثها » للدكتور محمد علي أبو ريات ، « أصول الرياضيات » لبرتراند رسل . الجزء الأول والسابع .

(3) Stebbing . op. cit, p. 40

وتنشد « أستنجع » رأى « رسل » بأن فريجة أدرك هذا التمييز مستقلا عن بيانو وفي نفس الوقت الذي عرف فيه بيانو الاختلاف بين تصورتين .

أساسية في إطار نظرية الحكم هي (١) :

١ — معرفة الصدق Truth

٢ — الفكر Thought (Gedanke)

٣ — قيمة الصدق (٢) Truth - value

والحقيقة أن تمييز فريجة الحاسم بين مسأله التقرير والحكم يفضى بنا إلى بحث موقفه العلم من بعض المواضع في المنطق بصفة عامة . وقد أهتم فريجة بهذه المسأله في المقالة التي كتبها بعنوان « الفكر » : بحث منطق ، حيث أكد لنا ما سبق أن أورده من أفكار في كتاب « التصورات » ، الذي تبني فيه الدعوة لرفض كل اتجه سيكولوجي في المنطق أو علم الحساب .

يرى فريجة أنه إذا ما نظرنا للمنطق وقوانينه بالمتطور التقليدي ، فإن هذا سيغضى إلى خطورة شديدة وصعوبات عديدة تكشف كل أبحاثه ، لأن هذا سيغنى بالضرورة أن يكون المنطق فن التفكير الصحيح .. وبالتالي تصبح القوانين المنطقية بمثابة المرشد للفكر في الحصول على الصدق (٢) . ومن ثم وجدنا فريجة يذهب إلى التمييز بين الموضوعات الخارجية أو الاشياء objects والتصورات Concepts

(1) Russell. B., The Principles of Mathematics; Appendix A, p. 477

(2) Anscombe, G. 2., An Introduction to Wittgenstein's,

Tractatus P. 14 وتشير « أنسكومب » إلى أن أجيال المنطقة حتى يومنا هذا يدينون بالفضل لفريجة فيما يتعلق بمفهومه عن (قيمة الصدق) ، وهي تنفذ في هذا الرأي مع ما ذهب إليه رسل في أكثر من موضع من كتاباته .

(3) Thiel, C., op. Cit, P. 22

فنحن نستطيع أن نتحدث عن الأشياء ونطلق عليها أسماء names ، أى نسميها .
أما التصورات (١) فهي تتطلب موضوعاً للملاءة ، وبالتالي فإن التصورات أقل
كماً لا من الأشياء ، والتصور هو ما يكون محملاً وفق مذهب فريجه المنطقي لا أن
يكون موضوعاً . ومن المعروف أن موقف فريجه هذا قد أثر ، فيما بعد ،
في أجيال المناطق والفلاسفة على السواء خاصة رسل وفيتجنشتين وكارناب Carnap .

لكن كيف نميز الأفكار thoughts عن الأشياء الموجودة في العالم الخارجي
في إطار مذهب فريجه المنطقي ؟

يقيم فريجه (٢) أربعة تميزات أساسية بين الأفكار والأشياء :

أ لا : أنه لا يمكن لنا رؤية الأفكار أولسها أو تذوقها أو شمها ، على حين
أن الأشياء تتمتع بهذه الخواص جميعاً .

ثانياً : أن الفكرة التي تكون لدى فرد ما تنتمي بالضرورة إلى محتوى
الشعور الخاص بهذا الفرد وحده ولا يمكن أن تكون بنفس الدرجة لدى أى
فرد آخر .

ثالثاً : أن الأفكار Ideas تحتاج إلى حامل bearer ، أما الأشياء الموجودة
في العالم الخارجي فهي مستقلة تمام الاستقلال عن هذا الحامل لأنها قائمة بذاتها ،

(١) وفي كثير من المواضع يستخدم فريجه كلمة (الدالة) Function بدلاً من

التصور Concept .

(1) Frege, G ; Thought : Alogical Inquiry . pp. 26 - 28, trans.
by A. M. and Marcelle Quinton, ed. in "Philosophical Logic" by
P. F. Strawson.

ومن ثم فانه اذا ما كانت لدى فكرة ما عن شيء معين فان هذه الفكرة في حد ذاتها تختلف عن فكرة أى شخص آخر عن نفس الشيء .

رابعاً : أن كل فكرة من الأفكار لها حامل واحد فقط ، فليس لشخصين نفس الفكرة .

وقد استخدم فريجة فكرته الأساسية عن تمييز الأشياء من التصورات في نظرية المعنى والدلالة ، لكن رسل^(١) ، وقد اهتم بعرض موقف فريجة في نظرية الدلالة ونقده ، أثار بعض الصعوبات الخاصة بموقف فريجة فيما يتعلق بنظرية العدد number وإقامة علم الحساب . ويمكن القول بأن ماوجه إلى فريجة من نقد لرسل أو فتجنشتين أو غيرهم من المناطقة ينحصر في نقطتين :

النقطة الأولى : أن فريجة كان يتحدث عن التصورات ، ومن ثم فقد كان مضطراً لان يفترض أن كل تصور له موضوع خاص به ومرتبطة به ويمكن اعتباره كموضوع فقط حين نتحدث عن التصور .

النقطة الثانية : أن تصور الموضوع الخارجى وفق مذهب فريجة لا يتفق تماماً مع نظريته التى أقامها فى المعنى والإشارة Sense and Reference والتي تعند امتداداً لنظرية الموضوع - المحمول .

(١) Russell, B., On Denoting, P. 45 ff. ed. in "Logic and Knowledge" by R.C. Marsh.

وأيضاً :

إلا أن ما وجه إلى فريجه من نقد لا يرقى إلى مستوى الحقيقة بالنسبة لجوهر مذهبه في المعنى والاشارة ، لأن تمييز فريجه قصده أساساً أن يؤكد رأيه في مسألة الذاتيه Identity .

ثانيا : موقف فريجه من أسس المنطق الاستنباطي ونظرية حساب القضايا
حينما تفحص فريجه د أسس وقوانين الحساب ، وجد أن الرياضيات بأسرها تعمل وفق المنطق الاستنباطي ، وأن الحساب إنما هو نسق متطور للمنطق لأن كل قضية حسابيه هي بالضرورة قانون منطقي . لهذا إتجه فريجه إلى محاولة إقامة المنطق كنسق إستنباطي في الحل الأول وفق أفكار ومفاهيم أساسية تجعل من المنطق المنطقي نسقا محكما يفى بأغراض البحث العلمي .

وقد أشرنا ونحن بصدد الحديث عن أرسطو ، أن كثيراً من الباحثين والمؤرخين المعاصرين للمنطق الأرسطي ذهبوا إلى أن أرسطو كان مدركاً تماماً لفكرة المنطق الاستنباطي في المنطق . وقد ظلت فكرة إقامة المنطق كنسق استنباطي تراود فكر المناطق عبر عصور طويلة إبتداءً من عصر لينتز وحتى فريجه ، الذي استطاع بدقته المنطقية أن يبين النقائص الجوهرية بالنسبة للمنطق الاستنباطي في المنطق .

عرض لنا فريجه أسس المنطق الاستنباطي في المنطق بصورة شبه متكاملة في « التصورات » ، (١) حيث نجد من ثايات الأفكار التي قدمها لنا ، أسس كل من نظرية حساب القضايا ونظرية حساب المحمول .

(١) محمود زيدان ، المنطق الرمزي : نشأته وتطوره ، ص ١٤٩ - ص ١٥٦ . والرموز

التي يستخدمها المنطقة هي رموز بيانو ، ذلك لأن رموز فريجه غاية في الصعوبة .

- (١) يرمز للقضايا بالرموز r, q, p
 - (٢) يرمز إلى تقرير القضية بالرمز \vdash
 - (٣) يرمز إلى المحمولات بالرموز H, G, F
 - (٤) يرمز إلى الموضوعات بالرمز Z, Y, X
 - (٥) وضع رمزا للسور الكلى للقضية (X)
 - (٦) اهتم بدراسة القضية المركبة والثوابت المنطقية مثل ثوابت السلب، والوصل والفصل والتضمن المساواة. ورمز لكل من هذه الثوابت.
 - (٧) اهتم بالتمييز بين عضوية الفرد في فصل واحتواء فصل في آخر.
- وقد وجد فريجه أنه يمكن إقامة النسق الاستنباطي ككل عن طريق استخدام فكرتين أوليتين هما التضمن، والسلب بالإضافة إلى ثلاثة تعريفات هي، ثوابت الفصل، والوصل والمساواة.
- وسوف نتناول كل من هذه الأسس ونحن بصلد عرض جوانب المذهب اللوجسيتي ونظريات المنطق الرياضي. ومن ثم فانه ينبغي علينا أن نتقل لبحث المواقف الأساسية للمذهب اللوجسيتي من المنطق وأبحاثه ونظرياته حيث نجد تجديدا شاملا للأبحاث المنطقية.

الباب الثاني

رسالة : بين المنطق التقليدي وبين المنطق الرياضي

الفصل الأول : رسالة ونقد المنطق الأرسطي

الفصل الثاني : رسالة وأسس المنطق الرياضي

الباب الثاني

رسل : بين المنطق التقليدي وبين المنطق الرياضي

خطوة رائعة سوف نحققها في هذا الباب ، وهي مدى أسهام رسل في تطوير الدراسات المنطقية ، وتأسيسه لمبادئها وأسسها على مبادئ رياضية ، ومنهج رمزي .

تتالت الخطوات السائرة نحو إقامة المنطق الرياضي الحديث ، وأسهم كل واحد من المناطق والرياضيين والفلاسفة بإسهام ما ، لكن هذه الاسهامات كلها قد تجمعت في عقل واحد من أئمة الفلاسفة والمناطق وهو برتراند رسل وساعده في ذلك أمام الرياضيين في العصر الذي نعيش فيه وهو هوايتهد .

وحينما تجمعت هذه الاسهامات في يد تلك العبقرية الفذة ، كان عليه أن يستفيد منها من جهة ، وأن يطور بعضها من جهة ثانية ، وأن يصيغها في هيئة نسق متكامل من ناحية ثالثة .

استفاد رسل من نظرات أرسطو التي تدعو إلى أن موضوع المنطق هو الاستنباط ، ومن أن المنهج فيه يجب أن يكون رمزيا ، ومن أن الغاية التي يجب أن تستهدفها الدراسات المنطقية هو امكانية قيام المنطق على هيئة نسق استنباطي Deductive System . كما استناد من نظريات الرواقين المنطقية ، ومن اسهامات ريموند ليل وديكارت وليبنز ودي مو جان وهاملتون وبول ويانو ووريجه . وكان عليه بعد ذلك أن يطور بعض هذه الدراسات الخاصة بالمنطق ، فذهب إلى أن القضية العامة لا تتضمن تقريراً وجودياً ، وهي لكي تتضمن مثل هذا التقرير

الوجودى يجب أن تصاغ على هيئة قضية شرطية، تشترط أولا وجود من تتحدث عنه، أى وجود الموضوع أولا، ثم إضافة ما نراه إلى هذا الموضوع. أى أننا نقرر أن الموضوع إذا كان موجودا فإنه يلزم عنه أنه كذا من الصفات أو المحمولات. والحق أن إدراك القضية العامة على أنها شرطية متصلة قد ترتب عليه تسامح خطيرة فى دوائر كثيرة من دوائر البحث المنطقى، عرضنا لها خلال الفصل الأول من هذا الباب .

وفى الناحية البنائية نجد رسل يقيم أو يؤسس اللوجستيقا ويرى أن النسق الذرى يمكن صياغته على هيئة نسق استنتاجى، وأن هذا النسق يتضمن مسلمات وتعريفات تشتق منها دوائر القضايا ثم يتحدث عن أنواع القضايا وأنواع الثوابت ولقيمتى الصدق والكذب بالنسبة إلى دالة السلب *negation* ودالة الفصل *Disjunction* ودالة الوصل *Conjunctin*، ودالة التضمن *Implication* ودالة عدم الاتفاق *Incompatibility* التى أحلها رسل محل دالة التكافؤ بعد أن أشار عليه شيفر *Sheffer* بذلك .

وهكذا استفاد رسل من الاسهامات السابقة عليه وعُدل، بل وثار على المنطق التقليدى، ثم قام بتشييد كامل لأسس المنطق الرياضى وسنعرض لهذه الموضوعات من خلال فصلين، الفصل الأول نتحدث فيه عن نقد رسل للمنطق الارسطى، والفصل الثانى تناول فيه أسس المنطق الرياضى عند رسل.

الفصل الثاني

رسل وأسس المنطق الرياضي

أضع لنا من خلال مناقشتنا لموقف رسل من المنطق التقليدي، أن ثمة عيوب في هذا المنطق أراد رسل أن يحدد موقفه منها، ومن ثم فانه قد تعين عليه أن يأتي بالجديد حتى يصلح ما في وجهات نظر التقليديين من أخطاء. فهل يمكن رسل من تقديم نظرية جديدة للمنطق من خلال مبحث القضايا؟

الواقع أن معرفة موقف رسل من مبحث القضايا يحتم علينا أن نلقى الضوء على قضايا النسق اللوجستي، الذي تمثل في تبنى صورة القضية الذرية Atomic Proposition كصورة أساسية يقوم عليها جهاز « مبادئ الرياضيات ».

استند رسل في أساس نظريته للعالم على بديهية مضمونها أن العالم الخارجي يتكون من أشياء كثيرة ذات كفيات qualities أو علاقات (١) Relations، وهذه الأشياء هي الواقع Facts التي يعبر عنها في قضايا.

والقضايا في النسق الذري يضمنها رسل في تصنيفات خمس أساسية هي القضية الذرية، والقضية الجزيئية Molecular والقضية العامة، والقضية الوجودية، والقضية العامة عمومية تامة. ويهتمان بين هذه الصور جميعا دراسة صورة القضية الذرية والقضية الجزيئية حيث يستند نسق مبادئ الرياضيات إلى صورتها.

١ - القضية الذرية

القضية الذرية، هي أبسط أنواع القضايا التي تعبر عن الواقعة الذرية. يذهب رسل في مبادئ الرياضيات إلى تعريف القضية الذرية بطريقتين. فالقضايا الذرية هي كل القضايا التي لا تحوى أجزاء تكون قضايا، ولا تحوى مقادير مثل a

أو بعض Some ، كما وقد تعرف على أنها القضية التي تنسب صفة من الصفات لشيء ما ، أو أن مجموعة من الأشياء تقدم بينها علاقة ما (٢)

وبسند تعريف القضية الذرية في معرفتنا بالعالم الخارجي ، (١٩١٤) إلى أن القضية الذرية هي تلك التي تثبت أن شيئاً ما له كيفية معينة ، أو أن أشياء معينة لها علاقة معينة ، (٣) ، إلا أن رسل في كتاب المبادئ يفضل التعريف الثاني الذي قدمه في المبادئ والسبب في ذلك أن هذا التعريف يقرر صراحة النظرة العلائقية باعتبارها أساس للنطق الرياضي .

والقضية الذرية ، كما يراها رسل ، أمثلتها وهذا أحرر ، ، وهذا أسبق من ذلك ، وهذا قبل ذلك ، ، وقد تأخذ القضية الذرية إحدى الصور التالية (٤) .

$$R_1 (X) , R_2 (X , Y) , R_3 (X , Y , Z) , \dots \text{etc}$$

حيث تشير R_1 , R_2 , \dots إلى العلاقة Relation ، تشير X , Y , Z , \dots إلى الأشياء ، أو الافراد الجزئية الموجودة في الخارج ، والجزئي Particular كما يعرفه رسل هو د أي شيء يمكن أن يكون موضوعاً للقضية الذرية ، (٥) ففي القضية الذرية يوجد لدينا اسم علم Proper name وكله أخرى ليست اسم علم .

القضية الذرية إذن هي تلك التي تنسب فيه صفة من الصفات إلى جزئي ، أو أنها تلك التي تقوم فيها علاقة بين جزئين . أنها قضية بسيطة ، محمولات ، أو أسماء ومحمولات ، أو أسماء وعلاقات (٦) .

(1) Principia, V. I, Introduction, P. XV

(2) Ibid, P. XV

(3) Russell., External world, P. 62

(4) Principia, P. xix

(5) Ibid, P. xix

(6) Lambrose & Lejewitz., Fundamentals of logic, P. 169

فلا بد أن نضيف إليها الجملة « يوجد إغريق » ، (٣) ، لأنه إذا لم يكن هناك في وقت من الأوقات إغريق ، فإن كل من القضيتين « كل الإغريق ناس » ، لا واحد من الإغريق انسان ، صادقتان معا . وفي هذا يقول رسل :

“ If it happend that there were no Greeks,
both the proposition that ‘ All Greeks are men ’
and the proposition that ‘ No Greeks are men,
would be true ” (1).

من التأمل في صورة القضية العامة وجد رسل أن الصورة الصحيحة للقضية « كل الإغريق ناس » هي « إذا كان إغريق فانه يلزم عن ذلك أنه انسان » . على هذا النحو يتبين لرسل أن صورة القضية العامة إنما هي في مضمونها شرطية متصلة (٢) hypothetical Conjunction . وكان أصحاب النزعة الارسطية قد اخفقوا في إدراك هذا التمييز ، لأنهم إقترضوا أن كلا من القضية الجزئية ، والقضية العامة ، ينطويان على تقرير وجودى لأفراد الموضوع (٣) . فبينما القضية «سقراط فان ، تنسب تمولا لموضوع مسمى (٤) ، نجد أن القضية « كل الإغريق فانون ، تعبر عن علاقة بين محولين « فان » ، « إغريق » . وقد اشار رسل (٥) إلى أن برادلي Bradley قد أدرك أن القضية العامة هي في حقيقة أمرها شرطية متصلة

(1) Ibid, p. 229

(١) لاث رسل هذا الموقف أيضا في عام (١٩٠١) في : Mathematical logic

٧٢ — ٧١

(3) Mourant., op. cit, p. 91

(4) Mourant., Myphilosophical Development, p. 69.

(5) Russell., (a) Mathematical logic, p. 70

(b) Philosophy of logical Atomism, p. 227

وقسم لنا المثال الذى طرحه برادلى فى « مبادئ المنطق » ، « المذنبون سوف يحاكمون » - يفسر رسل هذا المثال على النحو التالى « إذا أذنب شخص فإنه سوف يحاكم ، أو بمعنى آخر ، إذا كان من مذنب فإن من سوف يحاكم » . لكن برادلى بطبيعة الحال لم يكن ذا عقلية رياضية تؤهله لأن يدرك أهمية هذه النقطة كما أدركها بيانو أو فريجة من بعده .

وقد ترتب على إدراك القضية العامة على أنها شرطية متصلة نتائج هامة . فالقضية «سقراط انسان ، تتضمن تقريراً وجوئياً لافراد الموضوع ، بينما الصورة «كل الاغريق فانون ، لا تنطوى على مثل هذا التقرير ، بل تعبر عن علاقة بين دالتى قضيتين (١) .

أى أنها تعبر عن علاقة بين محولين ، وقد أمكن لأصحاب المنطق الرياضى أن ينطلقوا من هذه النقطة فيما بعد ليطوروا جزءاً هاماً من مباحث المنطق الرياضى ذات الطابع الفنى Technique خاصة فيما يتعلق بنظرية حساب المحمول (٢) وأوحساب الدوال ، ، ذلك أن ضروب الأقيسة - فى نظرية القياس التقليدية - ذات الصورة الكلية سيصبح بعضها بالضرورة ضروبا خاطئة بناءً على ما اتينا إليه بشأن اعتبار القضية السلكية Universal أو العامة ، علاقة بين محولين .

لا شك أن رسل حين درس المنطق الرمضى لبيانو استفاد الكثير من المفاهيم التى أدخلها بيانو فى دراسته للمنطق ، ومن أهم هذه المفاهيم فكرة «دالة

(1) Russell., Myphilosophical Development, p. 66

(2) Principia., v. 1, pp. 127 — 160

(٣) من المعروف أن رسل فى محاضراته عن فلسفة الذرية المنطقية ربط دراسته لهذه الموضوعات الثلاثة ببعضه .

Russell , The Philosophy of logical Atomism, p. 234.

القضية، ^(١) Propositional Function . ودالة القضية هو تعبير يحتوى على
مكون أو أكثر غير محدد القيمة ويصبح هذا التعبير قضية حين نخلع على هذا
المتغير أو المتغيرات ، قيم ^(٢) values .

ومفهوم دالة القضية الذى أخذ به رسل والمناطق من بعده يمكننا من التمييز بين
القضية ودالة القضية . فالخاصية الأساسية للقضية تتمثل فى أنها إما أن تكون
صادقة true أو كاذبة False ، على حين أن دالة القضية تصف بصفات ثلاثة
أساسية ، هى صفات الضرورة necessity والامكان Possibility والاستحالة
Impossibility . وعلى هذا الأساس فإن أى تعبير يحتوى على قيمة مجهولة - بلغة
الرياضيات - أو قيمة غير محددة ، نسميه دالة قضية . فإذا قلنا (س انسان)
فإن هذه الصورة تعبر عن دالة قضية ، وتصبح قضية بمجرد تعيين قيمة المتغير (س)
فإذا وضعنا سقراط ، مكان (س) لأصبحت لدينا قضية صورتها
سقراط انسان ، وهذه الصورة الأخيرة تنسحب عليها صفات الصدق والكذب
فقط ، على حين أن الصورة س انسان، تنسحب عليها صفات الضرورة والإمكان
والاستحالة . باعتبارها دالة القضية . وقد أغفل التقليديون هذا التمييز الأساسى
بين كل من القضية ودالة القضية .

ذهب أرسطو إلى ، أنه يقال لقضيتين أنها متقابلتين إذا ما اختلفتا فى
التكليف أو النكح أو النكف ما ^(٣) ، فالتناقض حينما يقوم بين الكلية

(1) Russell., Principles of Mathematics p 22.

(2) Russell , (a) Principia, v. I, p. 38 (b) Introduction to
Mathematical philosophy, pp. 155 — 156

(c) The Philosophy of logical Atomism p. 230

(d) My Philosophical Development, p. 66

(1) Keynes., Formal logic, p. 109.

السالبة والجزئية الموجبة والكلية الموجبة والجزئية السالبة، يقضى إلى أن التقيتين المتناقضتين Contradictory لا تصدقان معا ولا تكذبان معا (١). كما وأن المتضادتين لا تصدقان معا وقد تكذبان معا. والتضاد يقوم بين الكلية الموجبة والكلية السالبة.

لكن رسل تبين فساداً واضحاً في صيغة هذه القوانين ، يقول لنا رسل .

“ The Proposition ‘ No Greeks are men’ is ,
Course, the proposition ‘ All Creek are not men ’
both prapositions Will be true ... if it happens that
there are no Greeks. All Statements about all the
members of a class that has no members are true,
because the Contradictory of any general Statement
does assert existence and is therefore False in this
case ” (٢)

يتضح لنا من مقارنة موقف رسل في هذا الفصل ، بما ذهب إليه التقليديون من المناطق ، أنه يقرر بما لا يدع مجالاً للشك بناءً على موقفه السابق من القضية العامة ، أن كلا من التقيتين المتناقضتين تصدقان معا . وذلك في حالة ما إذا دلت موضوعات التقيتين على فصل ليس له أعضاء A Class that has no members وقد ترتب على هذا أن بدأ رسل (٣) في إعادة صياغة الصور الأربعة للقضايا

(1) Ibid., p. 109.

(2) Russell., The Philosophy of logical Atonism, p. 2 29.

(3) Russell., Introduction to Mathematical Philosophy. p. 162.

الحملة في المنطق الأرسطي حيث قدم لنا عياغة جديدة تتلام مع أفكار المنطق الرياضي .

« كل A هي B ، تعني « ϕ S تتضمن ψ S ، صادقة دائماً
« بعض A هي B ، تعني « ϕ S و ψ S ، صادقان أحياناً
« كل A ليست B ، تعني « ϕ S تتضمن لا- ψ S ، صادقة دائماً
« بعض A ليست B ، تعني « ϕ S ولا ψ S ، صادقان أحياناً

تقوم هذه الصياغة على التمييز بين صورتين « كل الناس قانون ، ،
«سقراط فان ، . القضية الأولى شرطية متصلة نترجمها على النحو التالي « إذا كان
سقراط انسان ، فسقراط فان ، ، أى إذا كان كل الناس قانون ، وكان سقراط
إنسان ، فان سقراط فان ، . ويمكن لنا أن نترجم القضية الأولى في تعديل رسل
هذا ، أى ان « كل A هي B ، تعني ان « ϕ S تتضمن ψ S ، صادقة دائماً ،
على النحو التالي : إذا عرفنا (A) بدالة القضية ϕ S وعرفنا (B) بدالة
القضية ψ S فانه إذا كان (A) «ناس ، كانت ϕ S (S انسان) ،
وإذا كان (B) فان كانت ϕ S « هناك وقت عندئذ يموت S ، ومن ثم
فإن الصورة (كل A هي B) تعني « ϕ S تتضمن ψ S صادقة أحياناً .

تلك هي المواضع الأساسية التي تناول فيها رسل معالجة المنطق الأرسطي
نقدًا وتعديلاً ، وسوف نتضح لنا مواقفه الأساسية ونحن بصدد معالجة
مذهبه الأساسي .

الفصل الثاني

رسل وأسس المنطق الرياضي

الفصل الأول

رسل ونقد المنطق الأرسطي

إذا كان المنطق الأرسطي قد تعرض لكثير من النقد على أيدي المناطق الرمزيين، فإنه من الواجب علينا أن نلقى الضوء على موقف أصحاب المنطق الرمزي المعاصر، وبصفة خاصة أصحاب الاتجاه اللوجستي من بعض المواضع الخاصة بمبحث القضايا في المنطق التقليدي، ولهذا فإننا سوف نعرض لموقف المذهب اللوجستي من خلال أبحاث رسل في مطلع هذا القرن لنقف على كيفية معالجته لمباحث المنطق الأرسطي. ذلك لأن فهمنا لنقد المذهب اللوجستي، للمنطق الأرسطي، سيكتسب من معرفة وجهة نظر المناطقة المعاصرين من أبحاث المنطق مما يتيح لنا الفرصة لتناول نظريات المنطق الرياضي المعاصر.

والواقع أننا إذا كنا نعرض لموقف الاتجاه اللوجستي ممثلاً في أبحاث رسل، فإن ذلك يرجع بالضرورة إلى أن أبحاث المشايين لهذا الاتجاه انطلقت فعلاً من أبحاث رسل واتجاهاته الأساسية في أكثر مواقعها.

تبدأ لنا الفرصة ونحن بصدد عرض اتجاه أرسطو المنطقي، والابتنات المنطقية التالية عليه، أن نعرف وجهة نظر التقليديين من المنطق فوجدنا أنهم اعتبروا صورة القضية الخملية كصورة أساسية وعرفنا أيضاً أن المشايين للموقف الأرسطي حصروا أبحاثهم في التقسيم الرباعي الذي قدمه أرسطو للقضايا ذات صورة الموضوع — المحمول، وبذلك فقد اتهموا إلى حصر القضايا في أربعة صور أساسية (1) :

الجزئية السالبة والتي صورتها (بعض ا ليست ب)

الجزئية الموجبة والتي صورتها (بعض ا ليست ب)

الكلية السالبة والتي صورتها (كل ا ليست ب)

الكلية الموجبة والتي صورتها (كل ا هي ب)

ويستند التقسيم الرباعي للقضايا الجمالية ، كما قدمه أرسطو ، إما إلى الكم أو إلى الكيف . رأى رسل من خلال استعراضه لأبحاث المنطق الأرسطي ، ومن خلال آراء بيانو وفريجة أن تقسيم القضايا على هذا النحو خاطئ من أساسه لأن القضايا ذات الصورة (كل ا هي ب) ليست حلية بالمعنى الدقيق ، لكنها تعبر عن علاقة بين محمولات ، (١) . وهذه القضايا هي في جوهرها قضايا تحليلية (٢) Analytic Propositions لأنها تعبر عن علاقة تقوم بين ا ، ب أي بين محمولين . فما هو إذن موقف رسل من القضية العامة ؟

قدم لنا رسل موقفه من القضية العامة في أكثر من موضع من أبحاثه ، إلا أن عرضه الشامل لهذا الموضوع تضمنته المحاضرة الخامسة من سلسلة محاضراته عن « فلسفة النظرية المنطقية ، The Philosophy of logical Atomism (١٩١٨ - ١٩١٩) » .

يرى رسل أن القضية العامة لا تتضمن تقريراً وجودياً ، ذلك لأنه إذا قلنا : إن كل الاغريق ناس ، فإنه لكي تصبح هذه القضية منطقية على تقرير وجودي

(١) Russell, B., On the Relations of universals and Particulars. P. 123

(٢) Ibid.. P. 123

Russell, The Philosophy of Logical Atomism, P. 229.

٢ - القضية الجزئية

تعتبر القضية الجزئية صورة أساسية من صور القضايا في النسق اللوجستي، وتستند في جوهرها إلى نظرية الروابط . يعرف رسل القضايا الجزئية بأنها القضايا التي « تحوى قضايا أخرى يمكن تسمية ذراتها » (١) ، وهذه القضايا تحوى كلمات مثل . If . . . then IF , or

ينظر رسل إلى القضية ، على اعتبار أنها تناظر الواقعة بطريقتين . إذا كانت الواقعة متحققة في العالم الخارجى ، أى حادثة ، فإن القضية تكون صادقة ، أما إذا لم تكن الواقعة متحققة في الخارج ، فإن القضية تكون كاذبة . فالقضية « سقراط فان ، تكون صادقة في حالة كون الواقعة قد حدثت فعلا وتكذب في حالة ما إذا كان « سقراط غير فان ، ، وهذا ما جعل رسل يؤكد لنا أن الواقعة لا تكون صادقة أو كاذبة ، لأن خاصية الصدق والكذب تنسحب فقط على القضايا ، فهي وحدها ما يحوى ثنائية dualism الصدق والكذب (٢) .

فالقضية الجزئية صورة مختلفة تماما عن صورة القضية الذرية ، فإذا قلنا « سقراط فان أو أن سقراط ما زال حيا » Socrates is mortal or socrates is still living ، فإن هذه القضية يمكن أن نشير إليها بالقضية الرمزية التالية :

$$(P \vee q)$$

تكون هذه القضية الجزئية من قضيتين p و q المرتبطت معا بثابت الفصل Disjunction وكل قضية منها تناظر واقعة من الوقائع ، وكلا الواقعتين يدخل مباشرة في الوقوف على صدق أو كذب القضية الجزئية ، لكن ينبغي أن نلاحظ أن العالم الخارجى لا يحوى واقعة منفصلة تناظر القضية الجزئية $(p \vee q)$ ، فليس هناك في العالم الموضوعى ما يناظر كلمة (أو) التي يعبر عنها ثابت الفصل .

(١) Russell., The philosophy of logical Atomism, P. 207

(٢) Ibid., P. 184

والحقيقة أن الروابط تلعب دوراً هاماً بالنسبة لصورة القضية الجزئية .
فالقضايا الجزئية قد تحتوى ثوابت الوصل Conjunction أو الوصل Disjunction
أو التضمن Implication أو السلب negation أو التكافؤ equivalence .
ولكى نميز بين صورة وأخرى من هذه الصور فلابد لنا من معرفة معنى الثابت
Constant . والثابت كما يراه رسل (١) لابد وأن يكون محدداً تحديداً تاماً ،
وهنا ما يميزه عن المتغير الذى ينتظر التحديد .

والحكم على القضية الجزئية بالصدق truth أو الكذب falsehood
يكون من خلال قيمة الصدق (٢) Truth - Value . فالصدق هو قيمة صدق
قضية صادقة ، والكذب هو قيمة كذب قضية كاذبة (٣) .

ومن ثم يمكن لنا وضع الدوال الأساسية التى يقوم عليها النسق الاستنباطى
ككل ، من خلال تحديده لمعنى الثوابت ، ولقيمة الصدق ولدالة الصدق .

(١) دالة السلب (١) Negation

يرمز للسلب فى مبادئ الرياضيات بالرمز \neg أى not ، فإذا كان لدينا
أى قضية مثل p فإن دالة سلبها هى $\neg p$ أى $\neg p$.

ومن أهم ما نلاحظه على هذه الدالة ؛ أنها دالة قضية واحدة . ولهذا فإن
صورتها مختلفة عن بقية الدوال الأخرى التى تعبر عن علاقة بين قضيتين (٤) .

(1) Russell., Principles of mathematics § . 6

(٢) يرجع هذا المصطلح الى فريجه كما سبق أن أشرنا فى تناولنا لمواقف فريجه .

(3) Russell., Introduction to Mathematical philosophy, p. 146

(4) Principia, p. 93

(٥) Russell., Introduction to Mathematical Philosophy, p. 147.

ولدالة السلب قيمتين فقط للصدق والكذب ، فإذا كانت القضية P صادقة .
 فإن $\sim P$ تكون كاذبة ، وإذا كانت P كاذبة فإن $\sim P$ تكون صادقة .
 ويمكن معرفة قيمة الصدق لهذه الدالة عن طريق قائمة الصدق Truth Table
 الآتية :

قائمة الصدق (١) :

P	$\sim P$
T	F
F	T

(٢) دالة الفصل Disjunction

يرمز للفصل في التسق الاستنباطي لمبادئ الرياضيات بالرمز \vee ويعني "or" .
 فإذا كان لدينا قضيتان p ، q تعبر كل منهما عن قضية ذرية ، فإن القضية المركبة
 التي تحويها ، أي المؤلفه منها معا في قضية واحدة ، تكون صياغتها ($p \vee q$) .

(١) سترمز إلى الكلمة صادقة True بالحرف الأول من الكلمة (T) . وسترمز إلى
 كلمة كاذبة False بالحرف الأول من الكلمة (F) .

وتصدق القضية الجزئية ($p \vee q$) حينما تصدق كل من القضية p والقضية q أو حينما تصدقان معا ، لكنها تكذب حينما تكذب كل من p ، q معا (١)
قائمة الصدق .

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

يلاحظ أن قيمة صدق دالة الفصل تتوقف على قيمة صدق p و q وعلى معنى ثابت الفصل الذي تحدده القاعدة المذكورة . ولهذا الدالة كما ترى ثلاث حالات صدق ، وحالة كذب واحدة .

٣ - دالة الوصل Conjunction

يرمز للوصل في مبادئ الرياضيات بالرمز (.) ويعني and . وقاعدة هذه الدالة تنص على أن الصيغة المولدة من p و q ، وهي ($p \cdot q$) تصدق فقط حين تصدق كل من p و q معاً ، وتكتب إذا كانت أحدهما على الأقل كاذبة .

قائمة الصدق

p	q	$p \cdot q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

يلاحظ أن قيمة صدق هذه الدالة يحدد ما إذا كانت (.) ، وقيم صدق الدالة هي القيم الموجودة تحت الثابت الرئيسي (.) .

٤ - دالة التضمن implication

يرمز للتضمن في مبادئ الرياضيات بالرمز \supset ويعني imply فإذا كان لدينا الصيغة $(p \supset p)$ فإنها تكون كاذبة في حالة واحدة فقط ، وذلك حين تصدق p وتكذب q ، ولكنها تصدق في الحالات الثلاث الأخرى .

ودالة التضمن تساوي دالة سلب كل من القضيتين معا مرتبطتان برابط الفصل .
وبذا يمكن وضعها في المعادلة الآتية .

$$p \supset q = \sim p \vee q$$

قائمة الصا و .

p	q	$p \supset q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(هـ) دالة علم الاتفاق inecompatibility

رمز لعدم الاتفاق بالرمز (/) أى Stroke. فالصيغة (p / q) تقرأ " p stroke q " ، أى p كاذبة أو q كاذبة . وقد استخدم رسل دالة علم الاتفاق بدلا من دالة الكاف - وذلك بعد أن أشار عليه شيفر Sheffer بأنه يمكن صياغة كتاب المبادئ بأسره وفقها . وتصدق هذه الدالة إذا كان كلا القضيتين المؤلفيتين كاذبتين أو أحدهما كاذب، لكنها تكذب في حالة صدقهما معا. (١) وعلم الاتفاق يتكون من سلب دالة الفصل، أو انفصال سلب p وسلب q . ومن ثم يمكن أن نضع الصيغة السابقة في إحدى المعادلتين .

$$1 - p / q = \sim (p \cdot q)$$

$$2 - p / q = \sim p \vee \sim q$$

قائمة الصدق

p	q	$p \cdot q$	$\sim (p \cdot q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

(١) Russell., Introduction to Mathematical philosophy p. 147.

تلك هي الدوال الأساسية التي يتضح لنا من خلالها الصور الأساسية للقضايا الجزئية كما عرضنا لها من خلال دالة الفصل ودالة عدم الاتفاق ودالة التضمن على اعتبار أنها صور أساسية للقضايا الجزئية والتي أقيم على غرارها النسق اللوجستي في مبادئ الرياضيات بطريقته البرهانية المعروضة في الجزء الأول من « المبادئ » .

الباب الثالث

الصلة بين المنطق والرياضة

لأبد لنا أن نتوقف لحظة نلتقط فيها أنفاسنا من هذا التعاقب الضخم الذى
تالى على مسألة تطوير المنطق من صوري قديم إلى رياضى حديث وذلك قبل
أن نتحدث عن النظريات التى جابت آفاق المنطق الرياضى .

ونلاحظ أننا قلنا تطور المنطق من صوري قديم إلى رياضى حديث ،
وهذه الملاحظة ذاتها تقودنا إلى إدراك أولى يشير إلى ناحية ثلاثية ما بين المنطق
وبين الرياضة ، وهى مسألة الصلة بين المنطق والرياضة : هل هذه الصلة هى صلة
تشابه ظاهرى وحسب ، أم أنها صلة جزء بكل ، سواء أكان هذا الجزء منطقا
أم كان رياضى ، أم أنها يرجعان معا إلى أصول واحدة هى الأصول
الأكسيوماتية كما قرر ذلك هيلبرت ، أم أنها معا يرجعان إلى قوة عليا هى
قوة الحدس ؟ لقد تبانت ردود المناطقة والرياضيين حول الإجابة على هذا
السؤال الأخير ، وظهرت مذاهب خمسة تحاول - من وجهة نظرها الخاصة -
بيان أو اصرار الارتباط بين المنطق وبين الرياضة . وهذه المذاهب هى (١) .

١ - مذهب التشابه الظاهرى

ويذهب أنصار هذا المذهب إلى أن الصلة بين المنطق والرياضة هى صلة

١ - يرجع القارئ إلى البحث المنشور الذى قدمه الدكتور محمد ثابت القندى حول هذه المذاهب

في كتابه « أصول المنطق الرياضى » ص ٩١-١١١ ، و « فلسفة الرياضة » ص ١٥٥ ، ١٦٤

تشابه ظاهري ، فإذا نظرنا إلى المنطق من جهة وإلى الرياضيات من جهة أخرى ،
لبدت الرياضيات شبيهة بالمنطق من حيث كونها :

أ - رمزيان .

ب - صوريان .

ج - ميكانيكان أو آليان .

وفيما يتعاق بالتشابه الخاص بالرموز فنحن نعلم أن العلم الرياضي يستخدم دائماً الرموز أو المنهج الرمزي في كل مسائله وعملياته ، بل - وأن خصيصة العلم الرياضي الأولى هي تمسكه بالمنهج الرمزي هذا . ولقد اكتسبت الرياضيات خلال تاريخها الطويل دقة فائقة بفضل استخدامها للمنهج الرمزي ، وحاولت علوم كثيرة تطبيق هذا المنهج على مسائلها وموضوعاتها لكي تنسب نفس الدقة واليقين والتجريد والعموم الموجودة في العلم الرياضي . وإذا نظرنا الآن إلى المنطق في صورته الحديثة المتطورة ، وعلمنا أن المسائل المنطقية والتي أصبحت تقوم الآن على ديدة نسق استنباطي Deductive Sytem إنما يمكن صياغتها بلغة رمزية تماماً كما هو الأمر في الرياضيات لأدركنا أن التشابه واضح بين المنطق وبين الرياضيات من حيث أنها يعبران عن مسائلهما بصورة رمزية تتأى عن كثافة الألفاظ اللغوية وغموضها واضطرابها .

حقاً لقد كالت رموز أرسطو واضع المنطق الصوري ناقصة إذا أنه رمز إلى المتغيرات المنطقية Logical Variables مثل أ ، ب ، ج ولم يرمز إلى الثوابت المنطقية Logical Constants مثل : إذا كان ، هو ، فإن الخ فجاء جهازه الرمزي ناقصاً ، ولكن خطوات التطوير التي تالت نحو انضاج المنطق

الصورى بحيث أصبح منطقا رياضيا تمكنت من أن تستكمل الجهاز الرمزى ، فتم ترميز الثوابت المنطقية . وأصبح المنطق فى صورته الرياضية تلك يجعلنا لانعلم إن كنا فى الرياضة أو المنطق بسبب التشابه الكبير بين العليين فى الناحية الرمزية .

أما النقطة الثانية التى يتشابه فيها المنطق مع الرياضة فهى الناحية الصورية . فالباحث فى المنطق الأرسطى لا يلبث أن يواجه بحقيقة قائمة فى المنطق الصورى وهى أن أرسطو قد رد جميع القضايا إلى وحدة صورية هى وحدة (الموضوع- المحمول) ولو لم يتمكن أرسطو من رد قضاياها جميعا إلى هذه الوحدة لما تمكن من القيام بعملية الاستنباط القياسى . وإذا كان المنطق الصورى قد تطور بعد ذلك من حيث الموضوع والمنهج والغرض إلا أنه ظل محتفظا رغم ذلك بالصورة فى نقائها التام ، ذلك النقاء الذى يتيح للعقل أن ينتقل يسر وسهولة من قضية مستنبط منها ما يلزم عنها . حقا لقد ظهر هناك منطق آخر هو منطق الاستقراء Induction أو ما يسمى أحيانا بالمنطق المادى ، وارتبط هذا النوع الأخير بالعلوم الطبيعية التجريبية على نحو خاص ، ولكن مثل هذا النوع الأخير الذى يعتمد عن الرمزية وعن الاستنباط وعن الصورية لا يعنينا هنا ، إذ ما يعنينا هو إيجاد تشابه بين النوع الصورى من المنطق وبين الرياضة حيث تشابه مع المنطق فى هذه الناحية الصورية .

وبديهي أن الرياضة صورية كالمنطق ، فهى لاتتجه إطلاقا إلى وقائع مادية تعوق عمليات الاستنباط فيها هذا من جهة ، ومن جهة أخرى فإن الرياضة لا يمكن بل ولا يجوز لها أن تتجه نحو المنهج الاستقرائى . ومعنى هذا أن الاستنباط جوهر العلم الرياضى وهو أيضا جوهر المنطق ، وهذا الاستنباط

ممكّن في العلين لأنها صوريان مجردان وليسا ماديان بأى معنى من معاني
المادية .

أما وجه التشابه الثالث والأخير بين المنطق وبين الرياضة فهو ينتج عن
التشابهين السابقين ، ذلك لأنه إذا كان المنطق رمزياً ، وإذا كان صورياً ، فانه
لا بد أن يكون آلياً مثله في ذلك مثل الرياضة تماماً . فإذا كنا في الرياضة نتناول
العمليات على نحو ميكانيكى آلى فنحول فيها ونبدل ونسقط ، ونقدم ونؤخر ،
ونصل ونفصل بالاقواس حسب قواعد معينة فإنا نستطيع أن نقوم بنفس
هذه العمليات ونحس بصدد المنطق مادام أنه صورى من جهة ورمزى من
جهة أخرى .

ومن ثم ذهب أنصار هذا المذهب إلى أنه توجد صلة بين المنطق والرياضة ،
وإن كانت هذه الصلة ظاهرية أو صلة تشابه خارجى بين العلين من حيث كونها
رمزيان وصوريان وميكانيكيان .

إلا أن المسألة بعد ذلك اتخذت طابعاً آخر ، وتعمقت في الصلة الداخلية
وإست الخارجية بين المنطق وبين الرياضة ، فظهر أولاً مذهب جبر المنطق الذى
اعتبر المنطق جزءاً من الرياضة وامتداداً لقواعده وتوابعه ثم ظهر المذهب
اللوجستى وهو يتخذ طريقاً عكسياً لمذهب جبر المنطق إذ أنه يرى أن الرياضة
جزء من المنطق وامتداد لقوانين ومبادئه ، ومعنى هذا أن المذهب اللوجستى
اتخذ طريقاً عكسياً لمذهب جبر المنطق . إلا أن ديفيد هابرت رفض أن
تكون صلة المنطق بالرياضة هى صلة جزء بكل أو صلة كل بجزء وإنما رأى أن
العلين يرجعان معاً إلى أصول أكسيوماتيكية لاهى منطقية ولا هى رياضية ،

ثم ظهر بعد ذلك المذهب الحدسي الذي يقيم الصلة بين العليين على أساس حدسي .
ولنتناول الآن هذه المذاهب بالتفصيل .

٢ - مذهب جبر المنطق

يرى أنصار هذا المذهب أن المنطق برمته يمكن التعبير عنه برمز جبرية .
وأنه متى أمكن القيام بمثل هذه الخطوة ، يصبح للمنطق مجرد فرع من فرع
الرياضة أو مجرد نظرية رياضية بين النظريات الكثيرة التي ظهرت على هيئة
جبرية مثل جبر الأعداد الرياضية وجبر الأعداد التخيلية ونظرية المجاميع وغيرها
وعلى هذا النحو يكون المنطق المعبر عنه برمز جبرية أحد هذه النظريات ، ومن
ثم يكون فرعاً من فروع الرياضة وامتداداً لنظرياتها وقوانينها . وهذا هو
أساس مذهب جبر المنطق *Algebra of Logic* .

ولقد كان لينتز هو أول من تحدث عن جبر المنطق ولكن أبحاثه لم تلق
نجاحاً في أيامه ؛ ولكن حينما بين بول أهمية جبر المنطق وألقى مزيداً من الضوء
عليه ، بدأ الباحثون يعودون إلى آراء لينتز عن جبر المنطق ، فاكسبت أعمال
لينتز الجبرية المنطقية أهمية خارقة . إلا أننا سوف نكتفي هنا بإبراز مذهب
جبر المنطق كما قرره بول .

يفسح مذهب جبر المنطق لبول مجالاً واسعاً للتطبيقات الرياضية ، خاصة في
نظرية المجاميع *sets* التي ظهرت في الانساق الرياضية لكل من «جورج كانتور»
و«ديديكند» . وإذا كنا قد أشرنا من قبل إلى الصورة الرياضية والمنطقية
لمذهب جبر المنطق «لبول» ؛ فإنه يمكن لنا أن نتقدم بخطوات واسعة إلى

الامام لاختبار صحة ماذهب إليه بول في مجال نظرية المجاميع. فما هي المجموعة ؟ وماهي المفاهيم الأساسية الداخلة في إطار نظرية المجاميع ؟ .

نحن نعلم من دراستنا للمنطق أن أرسطو عرف ضمنا نظرية الفصول - كما سنشير إليه في ثنايا عرضنا لنظرية المنطق الرياضي - من خلال تقسيمه الاجناس والانواع : وقد أشار أرسطو إلى تقسيم الاجناس والانواع على أساس التشابه الداخلي في نطاق الأشياء ، فالجموع المتشابهة من الكائنات ذات الصفات المتشابهة تندرج تحت جنس واحد أو نوع واحد . وعلى هذا النحو يكون أرسطو قد وضع لنا الأساس الأول لما يسمى بالمجموعة وأفرادها أو عناصرها ، فالمجموعة المكونة من أشياء متشابهة أو ما تكون ذات صفة أو صفات واحدة هي ما تسمى بالمجموعة ، (١) وأفراد المجموعة أو مكوناتها يمكن معرفتها عن طريق تسميتها ، أو عن طريق تعيين خاصة أو أكثر تحدد الأفراد التي تنتمي إلى المجموعة .

فإذا كان لدينا مجموعة ما A بحيث كان x أحد أعضائها فإننا نعبّر عن علاقة x بالمجموعة A بالقضية $x \in A$ ، ونقرأها x is a member of A . ولكل مجموعة ترتيب أو نظام order معين ، وقد تكون المجموعة متناهية Finite أو لامتناهية Infinite .

ويتحدث بول عما يسميه بالمجموعة الفارغة Null set والمجموعة الفارغة هي تلك التي ليست لها عناصر أو أفراد ، وهي تقابل الصفر ، ويرمز لها بالرمز \emptyset والحقيقة أن الدور الذي تؤديه المجموعة الفارغة في نظام المنطق الرياضي هو نفس الدور الذي يؤديه الصفر تماما في الحساب العادي . وهذه المجموعة تكافئ التناقض في المنطق .

التساوى بين المجموعات · Equality of sets

يقال لمجموعتين A ، B أنها متساويتان أو متطابقتان إذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة A له ما يشابه من عناصر المجموعة B والعكس بالعكس. وهذا هو ما يمكن التعبير عنه بالصيغة التالية :

$$X \in A \text{ implies that } X \in B,$$

$$\text{and } X \in B \text{ implies that } X \in A.$$

ويستخدم بول الرمز التالي \Leftrightarrow للإشارة إلى التضمن بين المجموعتين، وعلى هذا يمكن صياغته ما سبق على النحو التالي :

$$A \in B \Leftrightarrow (X \in A \Leftrightarrow X \in B)$$

العلاقات بين المجموعات Relations between sets

وإذا ما انتقلنا إلى مسألة العلاقات بين المجموعات في إطار نظرية جبر المنطق لبول لوجدنا أن هناك علاقتان أساسيتان بين المجموعتين هما علاقة الاحتواء وعلاقة المساواة.

١ — علاقة الاحتواء Inclusion

يرمز بول لعلاقة الاحتواء بالعلامة \subset ، فإذا كانت B مجموعة فرعية للمجموعة A فإنه يمكن التعبير عن هذه الصيغة رمزياً في الصورة التالية :

$$B \subset A$$

ونقرأ على النحو التالي « B is included in A »

وتكتب رياضيا على النحو التالي $B \supset A$

ومن ثم فإن الصيغتان $B \supset A$ و $A \supset B$ متكافئتان .

وعلى هذا النحو يمكن لنا التعبير عن صورة القياس الأرسطى

سقراط انسان

كل انسان فان

∴ سقراط فان

بالصيغة الرمزية التالية :

$$A \subset B$$

$$B \subset C$$

$$\Leftrightarrow A \subset C$$

٢ - علاقة المساواة Equality

وتساوى مجموعتين يعبر عنه بالصيغة :

$$A = B \text{ implies } A \subset B \text{ and } B \subset A$$

وبالعكس فان :

$$A \subset B \text{ and if } B \subset A, \text{ then } A = B$$

ويمكن لنا أن نستنبط من الصيغتين السابقتين الأنواع التالية من العلاقات :

حيث كل مجموعة تكون مساوية لنفسها $1 - A = A$

2 - $A = B \Leftrightarrow B = A$ حيث أن تساوى الجميع متماثل

3 - $A = B, B = C \Leftrightarrow A = C$

حيث المجموعتان متساويتان ومتعديتان Transitive

قوانين الجمع للمجموعة :

والجمع المنطقي يسير وفقاً للقوانين التالية :-

1 - Idempotent law of addition

$$A + A = A$$

2 - Commutative law of addition

$$A + B = B + A$$

3 - Assosiative law of addition

$$A + (B + C) = (A + B) + C \equiv A + B + C$$

4 - Absorption law of addition

$$\text{if } A \subset B, \text{ then } A + B = B$$

حاصل ضرب المجموعة :

والضرب المنطقي يسير وفقاً للقوانين التالية :-

1 - Idempotent law of multiplication

$$A A = A$$

2 - Commutative law of multiplication

$$A B = B A$$

3 - Assosiative law of multiplication

$$A (B C) = (A B) C \equiv A B C$$

4 - Absorption law of multiplication

$$A \subset B \Leftrightarrow A B = A$$

هكذا كان بول متجها إلى الجبر أكثر من اتجاهه للمنطق، فكانت رموزه تشير إلى ثوابت رياضية جبرية أكثر من إشارتها إلى ثوابت منطقية، والحق أن الالتفات إلى الثوابت المنطقية بالذات أكثر من الالتفات إلى ثوابت الرياضة كان خاصية أساسية من خواص المذهب اللوجستي. كما أن جبر المنطق عند بول كان متجها أكثر إلى الجبر منه إلى المنطق في طرق حل مسائله، وإذا كان بول يلجأ إلى تطبيق المبادئ الرياضية أو قواعد الحساب الرياضي دون قواعد المنطق وقوانينه، كما كان بول يقبل تفسيراً عددياً في استخلاص نتائج عملياته، بل أنه حول قيمتي الصدق والكذب المنطقيتين إلى قيمتين عدديتين هما الواحد والصفر على التوالي.

وضع بول عام ١٨٤٧ أصول هذا المذهب مستعينا بما كتبه ليلنر من قبل، وبعد هذا تابعت الأبحاث في مناقشة هذا المذهب وتدعيمه فظهرت أبحاث ماكول MacColl وفن venn وجيفونز Gevons في إنجلترا، وأبحاث بيرس Pierce في أمريكا وكتابات شرودر Schroeder في ألمانيا وكانت نهاية هذه الأبحاث متمثلة في البحث القيم الذي كتبه لويس كوتيرا L. Couturat عام ١٩٠١ وهو العام الذي أنهت فيه أبحاث جبر المنطق بسبب ظهور المذهب اللوجستي بصورة متكاملة على يد رسل عام ١٩٠٣؛ فلك المذهب الذي عكس الآية وقرر أن المنطق ليس جزءاً لكل هو الرياضة وإنما كل هو لجزء اسمه الرياضة.

• للبريد من البحث في مذهب جبر المنطق عند بول يمكن للباحث أن

يرجع إلى .

1 — S. A. Adelfio & C. F. Nolan. Principles and Applications of Boolean Algebra (Newyork 1964)

2 — F. Hohn : Applied Boolean Algebra (Macmillan Newyork 1966)

3 — Kays, Boolean Systems ((London 1968)

الطب الشعبي

في مستهل هذا الفصل ، نرى ان الطب الشعبي لا نعيد هنا - على نحو أو آخر - مناقشة ما ورد حول طبيعة الطب الشعبي في المصادر العربية المختلفة . سواء القديم منها - سندنا أمر كفاينا مؤوبته باحثون آخرون - وسنسير معاً الى ما نسميه من هذه المصادر بالموضوع على نحو ما يتناول هذا النص . ونحن نحاول فهم رؤية لموضوع الطب الشعبي من منظور آخر ، بالاعتماد على عدد من الدراسات الأجنبية الحديثة . التي نشرت مؤخراً حول هذا الموضوع . وذلك على النحو التالي :

١ - نظرة عامة الى موضوع الطب الشعبي .

(ب) اهتمام الدوائر الصحية العالمية مؤخراً بالطب الشعبي والمطبيين

الشعبيين

كما يصح من دراسه ، ماريوت ، Marriott شمال الهند ، ودراسه كلبمان ، Kleinman بتايوان . ودراسة « فختير ، Niehter بجنوب انهد . بالإضافة الى دراسه ، نوال المسيري ، بمصر . وتتضمن هذه الدراسات عدداً من عناصر التحليل المتصلة بالموضوع ، منها

١ - شبكات الحلولات المرضية (Semantic illness networks) كيف تتحدد نظرة الناس للمرض ، وكيف يتشكل سلوكهم العلاجي في اطار اواقع الاجتماعي والثقافي .

٢ - مستويات الطب الشعبي : الطب الشعبي الاحترافي ، الذي يمارس

عن أيدي معالجين محترفين ، والطب الشعبي المنزلي (home remedies) الذي يمارسه الناس العاديون بالاعتماد على أنفسهم .

٣ - الطب الشعبي والوضع الطبقي : الصلة بين الطب الشعبي وبين ثقافة الفقر .

٤ - الطب الشعبي والأولياء : نموذج للتداخل والارتباط بين موضوعات المعتقدات الشعبية بعضها وبعض .

٥ - انطب الشعبي والطب الرسمي : طرفان متصارعان على أرض الواقع الاقتصادي / الاجتماعي / الثقافي .

(ج) ملاحظات عامة ، واستنتاجات نظرية ومنهجية .

أولا : نظرة عامة إلى موضوع الطب الشعبي :

في فصل بعنوان « الطب الشعبي » (١) ، قدم « دون يودر » معالجة لهذا الموضوع ، اتقى خلالها «ضوءا على عدد من المفاهيم المتصلة به ، وعن التفرعات المتعددة في داخله . كما قدم لمحة تاريخية حول تطور البحث في هذا المجال بأوروبا والولايات المتحدة . بالإضافة إلى تفاصيل أخرى تتعلق بطبيعة العلاقة بين الطب الشعبي والطب الرسمي ، وأوضاع الطب الشعبي في الدول الصناعية المتقدمة ، سواء في المدن الكبرى أو في المجتمعات الريفية . وسوف أعرض فيما يلي لأهم الأفكار الواردة عند « يودر » عن النحو التالي :

(أ) حول المفاهيم المتصلة بالطب الشعبي ، وتقسيماته :

يذهب « يودر » إلى أن الطب الشعبي بمعناه المتعارف عليه الآن يتصل

Don Yoder; «Folk Medicine», in : R.M. Dorson (ed.); (١)
Folklore and Folklife, The University of Chicago Press,
Chicago, 1972; pp. 191-215.

وبديهي أن هذا التطور الكبير الذي طرأ على المنطق : موضوعا ومنهجا وخرضا لم يحدث فجأة ، إنما حدث على خطوات متتالية عرضنا لها تفصيلا في الباب الأول من هذا الكتاب . كما سوف نقوم بدراسة مستفيضة في الباب المقبل عن نظريات اللوجستيكا كما عرضها رسل وهو آيتهد . ولكننا نكتفي الآن بذكر أن التطور في ميدان الرياضنة والذي صحبه تطور مماثل في ميدان المنطق قد أدى إلى صلاحية المنطق ، لأن تشتق منه الرياضنة ، أو أن تكون الرياضنة مجرد امتداد للمنطق وقوانينه وقضاياها ، (١) .

٤ — المذهب الأكسيوماتيكي

عارض هذا المذهب الأخير مذهب جبر المنطق من جهة والمذهب اللوجستيكي من جهة أخرى ، فهو لا يرى أن الصلة بين المنطق والرياضنة هي صلة الجزء بالكل كما ذهب إلى ذلك مذهب جبر المنطق ، كما لا يرى أن هذه الصلة هي صلة كل بجزء كما رأى أصحاب المذهب اللوجستيكي . وإنما أتجه المذهب الأكسيوماتيكي اتجاها آخر وهو أن المنطق والرياضنة نبعا معا من أصول أكسيوماتيكية . لا هي منطقية وإلا كنا في المذهب اللوجستيكي ولا هي رياضية وإلا كنا في مذهب جبر المنطق ، وإنما تميزت هذه الأصول بأنها عارية عن المنطق والرياضنة معا ، أو أنها ذات طبيعة فوقية أعنى فوق المنطق والرياضنة معا ولعل هذا يظهر تماما توازي المنطق مع الرياضنة ، أو توازي الرياضنة مع المنطق فلا تمايز بينهما ، كما يظهر أيضا الصلة الوثيقة الداخلية والبنائية بين العمير الشقيين ؛ حيث أن مصدرهما واحد هو الأصول الأكسيوماتية .

1 — wilder, R. : Intrôduction to the Foundation of Mathematics. P. 219.

ولقد تزعم هذا المذهب ديفيد دلمبرت أستاذ الرياضيات بجامعة برلين حتى عام ١٩٤٥ ، فهو الذى وضع أساس النظرية الأكسيوماتية Axiomatic theory وجمع شتاتها ، وكان يريد بها أن يناهض مذهب جبر المنطق والمذهب اللوجستيقي معا .

وهذا المذهب الأكسيوماتيكي يحتم علينا أن نبحث في مسألة النسق الاستنباطي Deductive System الذى يبدأ بحدود أولية ، هي الأصول أو المسلمات والتعريفات ، وعن هذه الحدود الأولية التى نقبلها قبولا دون طلب البرهنة عليها أو إقامة الدليل على صحتها ، نبدأ عملية الاستنباط ، ونحن نستنبط من هذه الحدود الأولية القضايا المشتقة التى نستخلصها فى نظام تسلسلى محكم بحيث تعتمد كل قضية لاحقة على ما سبقها ، وبحيث لا يحتل نظام أو ترتيب أى قضية ، أو ترك موضعها لكى تحتل قضية أخرى ، وبحيث لا يستند فى البرهنة على أى قضية إلى أصول أو مسلمات أو قضايا خارجة عن تلك الموجودة فى إطار النسق الاستنباطي ، ولقد سار المنطق على هذا المنوال ؛ أى أقام نفسه على هيئة نظرية استنباطية ، وبالمثل فلقد حدث تطور هائل فى دائرة الرياضيات جعلها تقبل لأن تقام على هيئة نظرية استنباطية أيضا . إلا أن الهندسة وهى فرع من فروع الرياضيات كانت تتبع فكرة النسق الاستنباطي ؛ فلقد بين أقليدس منذ القدم أن الهندسة يجب أن تقوم على هيئة نظرية استنباطية ، وهو قد حذد بالفعل بعض التعريفات الهندسية ، كما وضع بعض المسلمات ، وابتداء من هاتين المجموعتين استنبط كل نظرياته الهندسية ، كذلك آمن أرسطو بأن هناك من القضايا من لا يقبل البرهنة وهى هنا المسلمات والتعريفات ، وأن هناك من القضايا من تكون البرهنة عليها وإقامة الدليل على صحتها أمرا ضروريا . كذلك ذهب الكثير من المنطقية والرياضيين

والمفكرين إلى أن العلوم لكي تكون بالغة الدقة واليقين يجب أن تكون رمزية أولاً كما يجب أن تحتوى على قضايا أولية وقضايا مشتقة ؛ الأولى لا يبرهن عليها والثانية لا بد أن يتم البرهنة عليها وإقامة الدليل على صحتها .

أمر طبيعي أن يكون النسق الاستنباطى منطقياً إذا كانت مسلماته أو أصوله الأولى وتعريفاته خاصة بالمنطق ، وأمر طبيعي كذلك أن يكون النسق الاستنباطى رياضياً إذا كانت هذه المسلمات وتلك التعريفات ذات طبيعة رياضية . وحينما استطاع المنطق واستطاعت الرياضة أن تتشكلا على هيئة نظرية استنباطية كانت نظرية جبر المنطق تضع الأصول الأولى فى هيئة جبرية ، وكانت النظرية الموجستيقية تضع أصولها الأولى فى هيئة منطقية ومن هنا كانت الصلة بين العليين صلة كل بجزء أو صلة جزء بكل .

أما هابرت فلم يرتض أن تكون هذه الأصول منطقية لذلك لم يرتض أن تكون رياضية ، بل ذهب خلافا للذهبين السابقين إلى قبول حدود ومسلمات أولية أخرى لا هى إلى المنطق ولا هى إلى الرياضة ، وإنها هى مستبعدة تماماً عن كل معنى - منستى أو رياضى لأنها مجرد رموز اسمية Nominal ومن ثم تكون صورية خالصة Pure Formalism ، منها تشتق الرياضة والمنطق معا وهذه الحدود أو المسلمات الأولية سماها هابرت بالأكسيوماتيك Axiomatic وبذلك سميت طريقته بالطريقة الأكسيوماتيكية وقد اشترط هابرت لإقامه الأكسيوماتيك ثلاث شروط هى :-

أ - شرط الاستقلال ؛ ومعنى هذا الشرط أن تكون مسلمات النسق أو أصوله مستقلة عن بعضها البعض ، أى أنه لا يجب أن يكون هناك تداخل بين مسلمة وأخرى . وهذا الشرط هام وأساسى لأنه لو تداخلت الأصول الأولى لادى هذا

إلى تداعل وغموض فيما يتعلق بالقضايا التي نستبسطها كلها من هذه الأصول
الأكسيوماتيكية المتداخلة. فيجب إذن أن تكون المسلمات الأولى مستقلة تماماً
عن بعضها البعض .

ب - شرط الاشباع : ويقصد بها هـبرت أن الحدود أو الأصول الأولى أو
المسلمات يجب أن تكون كافية بحيث تسمح لنا بإجراء كل عمليات الاستنباط في
النسق الموضوع له. إلا أن هذا لا يعنى من ناحية أخرى أن تكون هذه الحدود
أو الأصول الأولى أكثر مما يجب ؛ لأنها لو كانت أكثر مما يجب لادى الامر
إلى تعدد لا حاجة له ، وإلى تعطيل بعض الأصول الأولى عن الاستفادة منها .
ومعنى هذا كله أن المسلمات أو الأصول الموضوعات الأولى يجب أن تكون كافية
للاستنباط بحيث لا تزيد ولا تنقص ، لأنها لو نقصت لما أمكن أتمام عمليات
الاستنباط ، ولو زادت لتعطلت بعض الأصول التي لا حاجة لنا إليها .

ج - شرط عدم التناقض : ويعنى هـبرت بهذا الشرط أن مسلمات النسق أو
أصوله الأولى يجب أن تكون غير متناقضة فيما بينها وهذا الشرط شرطاً هاماً ؛
لأنه لو كانت الأصول الأولى متناقضة فيما بينها لكانت القضايا المستنبطة من هذه
الأصول متناقضة أيضاً .

وبهذا الشرط الأخير يكون هـبرت قد عاد إلى المنطق مرة أخرى مع أنه قرر
أنه يريد إقامة مذهبه الإكسيوماتيكي ابتداء من أصول لا هى منطقية ولا هى
رياضية : ومعنى هذا أن هـبرت بهذا الشرط الأخير قد تناقض في أقواله من حيث
أن ضمن أصوله شرطاً منطقياً .

والحق أن أبحاث هـبرت هذه رغم أنها قد أثارت الكثير من النقاش والجوار
بين المنطقيين والرياضيين على حد سواء ، ورغم أنها أسهمت أسهاماً كبيراً في

في توضيح أسس المنطق الرياضي ، إلا أن أبحاثه تلك لم يكتب لها الاستمرار ولم يعد يقبلها الكثيرون ، بل وتضاءلت أمام التقدم الهائل الذي أحرزه المذهب اللوجستيقي بفضل سيطرة آراء راسل ، وازدياد الأبحاث اللوجستيقية ، وانتشار هذه الأبحاث في المجالات المتخصصة ومن أهمها مجلة المنطق الرمزي Symbolic Logic التي ظهرت في أمريكا وغيرها من المجلات في جميع الأوساط المنطقية الرياضية .

هـ — المذهب الحدسي

إذا كان مذهب جبر المنطق قد قرر أن المنطق جزء من الرياضيات ونابع لها ، وكان المذهب اللوجستيقي يقرر أن الرياضيات جزء من المنطق وامتداد له ولقضاياها وقوانينه . وكان المذهب الأكسيوماتيكي يقرر أن الرياضيات والمنطق معا قد نبعا بتواز كامل من أصول أكسيوماتيكية لاهي منطقية ولاهي رياضية . فإن المذهب الحدسي يقف هنا موقفا مخالفا لهؤلاء إذ أنه يرى أن الأصول حدسية والعرض منطقي . أي أننا نحدد أصول الرياضيات ومنابعها مباشرة بواسطة الحدس ثم يجرى بعد ذلك دور المنطق في بسط وعرض ما حدسناه .

وهذا المذهب الحدسي Intuitionism اعتنقه رياضيون معاصرون من أمثال بوريل Borel وبوانكاريه Poincaré ولوبيج Lebesgue وبير Baire في فرنسا ، وبروور L. E. J. Brouwer وفایل weyl وهيتينج Heyting في ألمانيا . ولقد اتفقوا جميعا على معارضة المذهبين اللوجستيقي والأكسيوماتيكي . يتولى ويلدر ، لقد ظهرت خلال النصف الأول من القرن الحالي ثلاث مدارس تحاول الكشف عن أصل وطبيعة الرياضيات وهي المدرسة اللوجستيقية ، والمدرسة الحدسية ،

والمدرسة الأكسيوتيكية وقاد المدرسة الحدسية برور وتلامذته الذي تناول نقد قانون الثالث المرفوع في مقال ظهر له عام ١٩٠٨ ، (١)

ويرى أصحاب المذهب الحدسي أن الرياضيات تقوم على أساس إدراك الأعداد الأولية بالحدسي المباشر (٢) وأن الرياضة تقوم على أساس من التوليد الذاتي Self - generation الذي يبدأ بالحدس ، وطالما أن الرياضة ذات أصول حدسية فإنها من ثم لا تعتمد على اللغة . يقول هيتنج : أن الرياضيات مستقلة عن اللغة ، ويقرر أن " الرياضة وهي حلسية المنبع تتكون من أفكار عقلية ، وأن النظرية الرياضية تعبر عن واقعة حدسية متغلغلة في باطن فكرنا ؛ فحينما نقرر أن $2 + 2 = 3 + 1$ فإننا نعلم أن تكويننا الفكري قد حدس أن $2 + 2$ تؤدي إلى نفس نتيجة $3 + 1$

وينبغي أن نلاحظ أن أنصار المذهب الحدسي هنا يعولون على الحدس بالأعداد وليس الحدس المكاني ، وهذا يشير إلى أن هؤلاء قد رفضوا رفضاً قاطعاً مسألة الحدس المكاني هذه والتي رفضها الرياضيون بعد ظهور الهندسات اللاأقليدية

المنطق الحدسي The Intuitionist Logic

يلعب المنطق هنا دوراً هاماً في بسط وشرح ما توصل إليه الحدسيون في حلوسهم الرياضية التي تتوافق مع الجانب الدقيق من الفكر . ولقد رفض الحدسيون مبدأ الثالث المرفوع وما ينتج عنه من أن نفي النفي إثبات أو أن كذب الكذب ينتج عنه الصدق ؛ فكذب كذب القضية P يتضمن P ، فإذا كان كذب

1- Wilder; R.; Introduction to the Foundation of Mathematics p. 246

2- 1914 : p. 247.

P يؤدي إلى الكذب ، فإن تكذيب كذبتها يكون صادقا . وقد عبر رسل عن
هــر هذا بالصيغة التالية :

$$H. \sim (\sim P) \supset P$$

وذهبوا إلى أن القانون الحدسي المباشر هو قانون عدم التناقض وليس قانون
الثالث المرفوع ، وذلك لأنهم رأوا أن حدسنا المباشر لا يقبل التناقض أما فكرة
نفي النفي اثبات التي تظهر في قانون الثالث المرفوع فليست حدسا مباشرا واضحا
وأنما تحتاج إلى خطوة أكبر من الحدس المباشر. وعلى هذا النحو يفرق الحدسيون
بين قانوني عدم التناقض والثالث المرفوع ويرون أنها غير متساويين كما ذهب
إلى ذلك رسل في مبادئ الرياضيات ، حيث يذهب رسل إلى أن P متساوية مع
 $\sim (\sim P)$.

المنطق الرمزي عند الحدسيين :

لعل أول من قدّم تحليلا واضحا من بين الحدسيين للمنطق الرمزي أو
الرياضي هو هيتنج وسوف نحاول الآن إبراز منطق الرمزي كما وصفه هو :

أولا : يضع هيتنج الرموز التالية :

١ — ٨ ثابت الوصل Conjunction وتعبر عنه اللوجستيقا بالرمز . و ،

٢ — ٧ ثابت الفصل disjunction وتعبر عنه اللوجستيقا بنفس الرمز .

٣ — | ثابت النفي negation وتعبر عنه اللوجستيقا بالرمز . ~

٤ — ⊃ ثابت التضمن Implication وتعبر عنه اللوجستيقا بنفس الرمز .

ثانياً : هذه الرموز السابقة مستقلة تماماً عن بعضها البعض فـ $a \supset b$ ليست
 هي $a \vee b$ كما زعمت اللوجستيقا حينما قررت أن تتضمن $P \supset q$ هي
 نفسها $\sim p \vee q$.

ثالثاً : يعبر عن قانون التناقض في مثل هذا المنطق الرمزي الحدسي
 بالصيغة التالية :

$$\vdash \neg (a \vee \neg a)$$

رابعاً : أما قانون الثالث المرفوع فقد أهمله هيتنج على الرغم من أن صيغته
 يمكن أن تكون :

$$\vdash \neg (a \vee \neg a)$$

كما يمكن أن يصاغ بصيغة أخرى هي :

$$\vdash a \supset (a \vee \neg a)$$

وبناءً على هذا يمكننا أن نحصل على الصيغة التالية :

$$\vdash a \supset (a \vee \neg a)$$

وإذا عكسنا الوضع يمكن أن نحصل على الصيغة التالية :

$$\vdash \neg a \supset (a \vee \neg a)$$

خامساً : يمكن أن نحصل على ثابت المساواة بمجرد التفكير فيما سبق حيث

أن a مساوية لـ a ، كما يمكن الحصول على ثابت

الميل بأن نقبل a أو $\neg a$ ، وهذه يمكن وضعها في

الصيغة التالية :

$$\vdash a \vee \neg a$$

واخوتها من نوى المستويات التعليمية العليا ويشغلون وظائف كبيرة بالدولة .
انقسموا على انفسهم في الرأي . فبعضهم يرى عن اقتناع وتحمس أن
يحضروا لها أحد المشايخ المعروفين « بالبركة والنفوس الطاهر » لكي يتدخل
في امر علاجها . والبعض الآخر يعارض ذلك على أساس أن التصرف يجب
أن يتم بأسلوب منطقي وعقلاني ولا داعي لمثل هذه الخرافات .

أن يتم بأسلوب منطقي وعقلاني ولا داعي لمثل هذه الخرافات .
المعروف عنهم سمات الولاية ، وهو معروف لدى جميع أفراد الأسرة ويتردد
عليهم كثيرا . كما أن المريضة من أشد الناس اعتقادا في « بركة » هذا الرجل .
دخل هذا الشيخ حجرة المريضة ، وظل يخاطبها بعبارات تبعث على الأمل
في الشفاء ، مع تكرار أدعاء لها . ثم انصرف بعد فترة . وفي تلك الليلة
ظهرت بوادر تحسن على حالة المريضة ، حيث استطاعت تحريك يدها .
وهنا ظن أفراد الأسرة أن الشفاء قد بدأ يتحقق على يد هذا الشيخ ، فأخذوا
بهنئون انفسهم على ذلك ، كما سارع بعضهم الى ابلاغ هذا النبا للأقارب
والأصدقاء عن طريق التليفون . وكانت تعليقات الكثيرين ممن سمعوا بذلك
تكشف عن دهشة وحيرة . حتى أن بعضهم صرح بأنه سوف يراجع موقفه
من الأولياء ، إذ أن ما حدث يجعله يصدق ما يسمعه عن كراماتهم بعد أن
أن كان لا يصدق ذلك . غير أن حالة المريضة لم تبطل أن عادت إلى ما كانت
عليه من قبل ، بل ازدادت سوءا . فما حدث لم يكن سوى استجابة لالها ،
الذي نعب الشيخ دورا فيه .

أما عن ردود الفعل داخل الأسرة ، فقد دافع البعض عن الشيخ ، بمعنى
أن بركته قد تحققت « ولكن الله لم يأذن بالشفاء بعد » . وأما البعض الآخر ،
فقد أخذ يؤكد ثباته على موقفه من أن فكرة المشايخ ضرب من الخرافة .
غير أن ما يعنينا من ذلك كله هو ثلاث ملاحظات : تتعلق الأولى منها بالتباين
في اتجاهات أفراد الأسرة ومواقفهم من الأولياء . فمنهم يعتقد بحماس ، ومنهم
من يستهجن . وتتعلق الثانية بتداول نبا تحسن حالة المريضة على يد
الشيخ . وتصريح البعض بأنهم سيعيدون من مواقفهم حول الأولياء .
وتتعلق الملاحظة الثالثة بالجوانب انسيكولوجية المتصلة بالمرض ، وقابلية
المريض للالها .

١٠ : حول الجوانب السيكولوجية للتصلة بالاعتقاد في الأرياء :

١ - أثناء مشاركة الناحية في مولد انجسين . بالقاهرة . ل الفترة من ٣ / ٤ / ١٩٧٨ ، للوفد على ما جرى من ممارسات في . تجمعت لديه بعض الملاحظات التي تتصل بالجوانب السيكولوجية .
٢ - الممارسات . ومن هذه الملاحظات ما يتعلق بانوفاة حجية .
٣ - يتعلق بموضوع بالذور . وسوف أقدم بعض هذه الملاحظات في السند - ١٢٠ .

٤ - سرقة عرو . من إحدى مري . حفظه دميظ أي .
٥ - بسن بدستة امرأة مريضة بانسلر ، تكلي . حيث كانت فاقدة لـ .
٦ - وكانت هذه المريضة ممددة على أحد أركان الميدان .
٧ - وحولنا أرباب أسرتها المكونة من الزوج ، أمي - ٥٥ سنة .
٨ - مريضة ، ٣٥ سنة) ، وزوجها (أمي - ٤٠ سنة . وقد أحيت بمقابلة مع هذه الأسيرة تبين منها ما يلي :

١ - أن هذه الأسيرة تنتمي إلى فئة أشباه معدمين . فأنزوج بهاك ثلاثة أرباع الميدان ، وزوج الابنة ميتلجر لفدان وثلاثة فراريض .
٢ - أن المريضة أصيبت بالمرض منذ حوالي خمسة أشهر ، وأنهم عرضوها على أطباء بمدينة دميظا ومدينة المنصورة ولكن العلاج لم ينت بنتيجة .

٣ - أنهم بعد شهر من اصابتها بالمرض ، وعرضها على الأطباء دون ظهور بوادر تدل على تحسن حالتها أخذوا قطعها من « أترحا » وذهبوا بها إلى أحد المشايخ « (السحرة) بقرية من القرى ، ولكن الشيخ نصحهم بالاستمرار في علاجها حسب تعليمات الأطباء .

٤ - أخذوا يفقدون الأمل في شفائها . وخاصة بعد أن طالت فترة المرض والعلاج انتهى استعدانوا خلالها بمبالغ كثيرة .

٥ - مجموعة من الصور الفوتوغرافية و ٥ جلات نصوته

الباب الرابع

نظريات المنطق الرياضى

- | | |
|----------------|----------------------|
| الفصل الأول : | نظرية حساب القضايا . |
| الفصل الثانى : | نظرية حساب المحمول . |
| الفصل الثالث : | نظرية حساب الفصول . |
| الفصل الرابع : | نظرية العلاقات . |

الفصل الأول

نظرية حساب القضايا (اللوغستيكا)

سبقت لنا الإشارة في الاجزاء المتقدمة أن ثمة أفكاراً جديدة أدخلها المحدثين من المناطق لإبتداء من عصر لينتر إلى عصر فريجة ، لكن لم يكن هذا يعنى بطبيعة الحال أن النسق المنطقى إنما تطور تطوراً هائلاً خلال هذه الفترة فحسب ؛ وإنما وجدنا الكثير من المحدثين خاصة مدرسة المنطق البولندى المعاصر يان لوكاشيقتش؛ يؤكد أهمية آراء أرسطو المتعلقة بالنسق المنطقى المعاصر ، ذلك أن لوكاشيقتش كشف لنا عن نقاط القوة فى المنطق الصورى الأرسطى فيما يتعلق بالمتغيرات والثوابت ومسور القضية ، فضلاً عن إدراكه التام لصورة التضمن فى القياس ؛ رغم أن التضمن عرف بصورة أكثر وضوحاً فى عصر متأخر عن العصر الأرسطى .

وهنا يمكن لنا أن نستنتج أن تطور المنطق الرياضى المعاصر إنما قد سار فى ثلاث إتجاهات متوازية إبان طور الشباب . الإتجاه الأول حاول التنقيب عن الأصول التى انحدر منها ، وقد تمثل هذا الإتجاه فى لوكاشيقتش ومدرسته . والإتجاه الثانى حاول أن يخضع تطور المنطق لأبحاث الرياضيات المعاصرة فى آخر اشكالها ، ولم تنتهى إلى اشتقاق الرياضية والمنطق معاً من مجموعة واحدة من الأصول المنطقية ، بحيث إستحال الفصل بين المنطق والرياضيات بصفة نهائية ، وهذا ما يفسح عنه كتاب " مبادئ الرياضيات " لرسل وهو ايتهم . أما الإتجاه الثالث فبقدر ما أخذ

عن اتجاه رسل وهو أيتهد ، يخضع المنطق تماما للرياضيات ويرى فيه طوراً بدائياً من أطوار الرياضيات ، وتصبح القضية الرياضية في متن مذهبة هي الأصل والاساس الاول ، وليس هناك ثمة منطق ، بل الصدارة للرياضيات ، ويعبر عن هذا الاتجاه كل من « جودل ، و « كاسيرر » .

ونحن وإن كنا نقيم قضيتنا الأساسية في هذا البحث على كل من الاتجاه الاول والثاني معا ، إلا أنه ينبغي أن نشير إلى أن الاتجاه الثالث قد أفضى إلى نواحي تطبيقية هامة للمنطق الرياضى المعاصر في الفيزياء المعاصرة . وهذا ما لن نتناوله هنا ، بل سنجعله موضوعاً للدراسة مقبله .

هل تمكن الاتجاه المنطقى الرياضى المعاصر في بداية القرن العشرين من صياغة أصول وقواعد حساب القضايا صياغة دقيقة من الناحية المنطقية والرياضية معا ؟

الحقيقة أن حركة تطور المنطق الرياضى في بداية القرن العشرين كانت موضع دراسة الفيلسوف المنطقى الرياضى المعاصر برتراند رسل ، ذلك أن رسل بعد أن ساهم في مؤتمر باريس الرياضى عام ١٩٠٠ أتيح له الفرصة ليقف على أعمال جهابذه علماء المنطق والرياضة معا وفي مقدمتهم « جيوسيب يانو ، الإيطالى ، فقد تميز يانو بقوة الحجج والبرهان ودقة تحليلاته الرياضية والمنطقية مما أثار فضول رسل الذى إنكب على دراسة مؤلفاته ليقف على دقائق أعماله . وبعد أن حاد رسل إلى إنجلترا انصرف إلى البحث في أصول الرياضيات بحاشية ، فأخرج لنا فى عام (١٩٠٣) « أصول الرياضيات » وقد كان عملاً عبقرى هذا وفريداً ، تتلذذ عليه الرياضيين والمناطق لاجيال طويلة . إلا أن هذا لم يكن يعنى أن صياغة المنطق الرياضى قد تبلورت بصفه نهائية فى أصول الرياضيات ، ذلك أن رسل يؤكد لنا فى فترة لاحقة على الأصول أى فترة ما بعد كتاب الجهادى .

أن قيمة أصول الرياضيات إنما هي قيمة تاريخية فقط لأنه يعبر عن فترة معينة في تطور المنطق الرياضي (١).

تأسس الدعوى الأساسية اذن في كتاب الأصول على رد الرياضيات إلى أصول منطقية، وإمكانية الوقوف على تطابق المنطق والرياضيات معا. لكن بعد أن تأكد الرياضي هو ايتهد من أصالة تليذه رسل في مجال البحث الرياضي والمنطقي، نشأت فكرة التعاون المشترك بينهما في مجال المنطق الرياضي، فكان كتاب « مبادئ الرياضيات » ثمرة جهد وتعاون مشترك لهما معا.

والحقيقة التي لا تقوى دعوى الخصوم على دحضها أن كتاب ابر نكيبيا، Principia بعد بمثابة انقلاب خطير في أبحاث المنطق والرياضيات على السواء وقد لعب دوراً هاماً في تطور المنطق الرياضي، (٢)، ومن ثم فإن إصدار هذا العمل لم يكن بمثابة أمر عرضي، بل دفعت الضرورة والحاجة إليه لتدعيم المنطق على أساس تزويده بالابعاد اللازمة للحركة في آفاق جديدة، فضلاً عن كونه قد خلع على الرياضيات نوباً جديداً في شتى أبحاثها.

اتهى رسل وهو ايتهد في « المبادئ »، إلى اشتقاق الرياضيات بأسرها من مجموعة بسيطة من القضايا الابتدائية Primitive Propositions تعتبر بمثابة أصول الاشتقاق بالنسبة للرياضيات، وبالتالي فقد أنجزا في هذا المضمار عملاً مزدوجاً:

(1) Russell., The Principles of Mathematics, Introduction, 2 nd edition. 1937 .

(2) Ayer, A. J., An appraisal of Bertrand Russell's, Philosophy p. 171 .

الأول : أن الرياضيات يمكن أن تشتق من أصول منطقية بحتة

Pure Logical Axioms

الثاني : أنه قد اتضح لنا من خلال هذا العمل الضخم أن الاستنباط

deduction هو أساس رد الرياضيات إلى المنطق .

ومن ثم وجدنا بكتاب المبادئ يمثل لنا مرحلة تاريخية وفكرية حاسمة في تطور المنطق الرياضي ، ذلك أنه يجيء في مفاخر الطرق بالنسبة للأبحاث المنطقية والرياضية على السواء ، ومن ثم فهو يقسم تاريخ المنطق الرياضي إلى قسمين ، « ما قبل المبادئ » ، « وما بعد المبادئ » ، وتفسير هذا أن التصورات المنطقية التي تم التعبير عنها باللغة في كتاب الأصول أمكن التعبير عنها تعبيراً رمزياً في صيغ نهائية في « المبادئ » ، فأصبح المنطق يتحرك من خلال نسق متكامل من الرموز ، حيث تتأزر الثوابت والمتغيرات معا في نسق واحد . وما عجز الفكر عن إدراكه من حقائق في كتاب المبادئ حمله لنا رسل بالشرح والتفسير في « مقدمة فلسفة الرياضيات » ، (١٩١٩) .

يمكننا الآن أن نتبع تحليلات كتاب « المبادئ » ، في جانبها المنطقي الرياضي ،

حيث نجد المنهج الاستنباطي يعتمد على ثلاثة أمور أساسية :-

أولاً : أن النسق الاستنباطي deductive System « لمبادئ الرياضيات » ،

يعتمد في كل أجزاءه اعتماداً واضحاً على مجموعة الأفكار الابتدائية التي تنتمي إلى النسق .

ثانياً : أن النسق الاستنباطي شيد على أساس مجموعة من الرموز الأساسية

Basic Symbols تمثل في جوهرها أعلى درجات الصورية Formality بالنسبة

لكل من الرياضيات والمنطق ، والتي يكون كلاهما وفقاً لها .

ثالثا : أن الجزء الخاص بحساب القضايا في النسق الاستنباطي لمبادئ الرياضيات يعتمد بصفة مباشرة على مجموعة من القضايا الابتدائية ، تلك التي لها بداهة قوانين الفكر الأساسية في المنطق الصوري .

وحتى يمكننا الوقوف على أصول نظرية حساب القضايا في المذهب الوجسني لا بد لنا وأن نلقى الضوء على الطريقة التي أتبعنا في الجهاز الرمزي لإجراء حساب القضايا .

أولا - المبادئ الأساسية التي يعتمد عليها النسق الاستنباطي

إذا كان النسق المنطقي لمبادئ الرياضيات يستند إلى نظرية الاستنباط، حيث نستنتج نتائج Conclusions من مقدمات Premisses ، فإن الاستنباط في كتاب المبادئ يعتمد في جوهره على علاقة التضمن Implication باعتبارها علاقة أساسية. ومن المعروف أن فكرة التضمن فكرة قديمة أدراكها أرسطو وهو يصادق تشييد نظرية في القياس، بل وأقام القياس على أساسها ، وفق رأى د لو كاشيفتش ، الذي نأخذ به. إلا أن الفكرة ترجع بصفة مباشرة إلى د سكتوس إمبريقوس ، الذي كان أول من أشار إلى طبيعة علاقة التضمن (١). وقد عرف د تشارلز بيرس ، فوائد التضمن المادي ، إلا أن رسل كان أول من اكتشف أن نسق المنطق ككل يمكن أن يتطور من خلالها (٢)

يتميز رسل بوضوح بين الاستدلال Inference والتضمن Implication حيث أن كل منهما يختلف عن الآخر من حيث طبيعته المنطقية ، فالتضمن عملية

(1) Reichenbach, H., Bertrand Russell's Logic, P. 26, Schilpp vol

(2) Ibid .

ثربط بين قضيتين مما وتفضى الى قضية جديدة ، على حين أن الإستدلال عملية
تجرى على القضايا . ومن ثم فإن النسق الاستنباطى ككل لا بد وأن يحتوى بين
مقدماته العديدة خصائص التضمن التى تسمح بقيام عملية الاستنباط (١) .

والنسق الاساسى للاستنباط يقوم بعفة نهائية على أربع حقائق ضرورية لقيام
عملية الاستنباط هى :-

(١) بأن نسق كتاب المبادئ يقوم على أساس الاشارة للقضايا بحروف
لاتينية صغيرة (٢) Small latin letters مثل p, q, r . واستخدام
الرموز هنا يحقق فائدة عملية كبيرة ، اذا أنها تقوم مقام اللغة لتوضح الصورة
المنطقية على نحو دقيق ، فضلا عن أن الرمز فى حد ذاته يعبر عن درجة عليا من
درجات التجريد الفكرى لأنه يحيل القضية المنطقية الى صورة رياضية بحتة ،
هذا الى جانب ما للرموز من خصائص هامة تمثل فى إمكانية التداول العالمى .
وهنا تتغلب على صعوبات التفاهم بين اللغات المختلفة ، وبذا فهى توفر لنا قدرا
كبيرا من الجهد والوقت المطلوب فى اللغة .

(٢) أن كل قضية مقررة asserted أى مثبتة (صادقة) من قضايا النسق
نجدها مسبوقة بعلامة التقرير assertion والتى يرمز لها فى كتاب المبادئ بالرمز
(\vdash) . وقد استعار رسل وهو ايتهد علامة التقرير من فريجة . إلا أن

(1) Russell, My Philosophical Development, P. 74 .

(٢) : نفضل فى هذا العدد أن نبقى على استخدام الحروف اللاتينية لأنه إن أمكننا تعريب
رموز القضايا ، فلن نتكهن من تعريب القوايت المنطقية التى تقوم بينها ، فضلا عن أن
النظريات التى تقدمها فى هذا المؤلف هى مما يهم المتخصصين من المتابعة والرياضيين .

فنجشثين من بين المعاصرين من المناطق ، يؤكد لنا في رسالته المنطقية الفلسفية ،
 Tractatus logico Philosophicu ليست لها أى ، معنى بل أنها خالية من المعنى
 ذلك أنها لا تتعلق بالقضايا ، بل تتعلق أساساً بفكرة ترقيم القضايا ، ومن ثم فإن
 القضية لا يمكن أن تقرر صدق ذاتها (١) . والحقيقة أن نقد فتجشثين لعلامة
 التقرير في منطق رسل وفريجة من قبله ، بجانب كثير من الصواب لأنه طالما أننا
 نتحدث عن عملية برهانية فسيبين لنا من ثانياً خطوات البرهان الرياضى الذى
 يجرى على القضايا ، ما إذا كانت القضايا صادقة أم لا ومن ثم فإننا سنلتزم
 أساساً بخطوات البرهان المتبعة مستبعدين علامة التقرير التى تسبق القضية .

(٣) كما يعتمد النسق الاستنباطى لحساب القضايا ككل على مجموعة من
 الثوابت المنطقية التى يقوم عليها الاشتقاق . وهذه المجموعة من الثوابت
 تتمثل فيما يلى :-

١ - ثابت الساب negation

ويرمز له بالرمز \sim ويقرأ not ، فإذا كانت لدينا القضية p فإن دالة
 ملها يعبر عنها بالصيغة $\sim p$ وتقرأ $\sim p$ ، not - p . فإذا كانت القضية p
 صادقة كانت $\sim p$ كاذبة ، وإذا كانت p صادقة كانت $\sim p$ كاذبة .

٢ - ثابت الفصل disjunction

ويرمز له بالرمز \vee ويعنى or . فإذا كانت لدينا قضيتان p ، q إرتبطتا
 معاً بثابت الفصل ، فإن القضية الجديدة المولفة منهما معاً تأخذ الصيغة $p \vee q$ ،

ويقرأ $p \text{ or } q$ ، وتصدق $p \text{ or } q$ ، ما إذا كانت p ، q صادقتان
 معا أو إحداهما صادقة والآخرى كاذبة ، لكنها تكذب في حالة كذبها معا .

ج - ثابت الوصل Conjunction

ويرمز له بالرمز (\cdot) ويقرأ and ، فالقيمتان p ، q حينما يرتبطان
 معا بثابت الوصل $p \cdot q$ ، وتقرأ هذه الصيغة $p \text{ and } q$ ، فإن الصيغة الموافقة
 منهما ما تصدق في حالة صدق كل من p ، q معا وتكذب في حالة كذب
 إحداهما على الأقل .

د - ثابت التضمن Implication

ويرمز له بالرمز \supset ويقرأ imply ، فإذا ما ارتبطت p ، q معا
 في الصيغة $p \supset q$ ، فالتا نقرأ الصيغة كلها $p \text{ imply } q$ ، وهذه الصيغة
 تصدق في ثلاث حالات هي :-

- إذا كانت p صادقة ، q صادقة .
 - إذا كانت p كاذبة ، q صادقة .
 - إذا كانت p كاذبة ، q كاذبة .
- وتكذب في حالة واحدة فقط هي :
- إذا كانت p صادقة ، q كاذبة .

هـ - ثابت التكافؤ Equivalence

ويرمز له بالرمز \equiv ، ويقرأ Equivalent ، والصيغة الموافقة من
 p ، q معا هي $p \text{ equivalent } q$ ، وتصدق قضية التكافؤ في ثلاث
 حالات هي :-

• إذا كانت p صادقة ، q كاذبة .

• إذا كانت p كاذبة ، q صادقة .

• إذا كانت p كاذبة ، q كاذبة .

لكنها تكذب في حالة صدقها معا .

وينبغي أن نذكر أن شيفر shifler اقترح على رسل استبدال التكاثر ، بعدم الاتفاق Incompatibility الذى يرمز له بالرمز \backslash أى stroke ، كما أوضح أنه من الممكن إقامة نسق كتاب المبادئ بأسره على أساس ثابت عدم الاتفاق ، وقد ترك له رسل إعادة صياغة مبادئ الرياضيات ، مرة ثانية وفق هذه الفكرة ، لكن شيفر لم يفعل ذلك ، ولم يقدم أحد من المناطق أو الرياضيين على مثل هذه المحاولة . والحقيقة أن صياغة كتاب المبادئ مرة ثانية باستخدام هذا الثابت إنما يقتضى تعاون جيل كامل من الباحثين ، فضلا عن أن شيفر لم يتنبه إلى أننا حتى لو تمكنا من هذه الصياغة فلن نستطيع أن نستقى صيغة نهائية عن ثوابت السلب والوحد والفصل ، ذلك أن عدم الاتفاق يعرف بدلالة هذه الثوابت .

$$p \backslash q = \sim (p \cdot q)$$

$$p \backslash q = \sim p \vee \sim q$$

وربما كان هذا الأمر هو الذى دفع رسل في الطبعة الثانية ، للبرنكييا ، لأن يرد جميع هذه الثوابت ويختصرها إلى ثلاثة فقط هى السلب والفصل وتعريف التضمن بدلالة السلب والفصل معا .

$$p \supset q = \sim p \vee q$$

(٤) أن النقط dots في الجهاز الاستنباطي تستخدم لتحديد مجال القضايا وهي تقوم مقام الأقواس ، ومن ثم فهي جزء من الجهاز الرمزي المستخدم . لكنه يمكن لنا استغنى عن النقط باستخدام الأقواس وفقاً لما هو متبع في الرياضيات حتى لا يحدث أى نوع من الإختلاط بين مجال القضايا المختلفة .

ثانياً القضايا الابتدائية التي يعتمد عليها النسق الاستنباطي

القضايا الابتدائية الموضوعة في أساس النسق الاستنباطي هي قضايا أفترضت أصلاً بدون برهان عليها ^(١) ، وقلة عدد هذه القضايا وبساطتها في أى نسق منطقي ، هي التي تكسب النسق الاستنباطي أهمية وقوة الاستنباطية .

ويرمز للقضية الابتدائية في المبادئ ، بالرمز Pp أى *Primitive Proposition* وقد أستعار رسل هذا المصطلح من بيانو ^(٢) Peano . وتنحصر هذه المجموعة من القضايا الابتدائية في القضايا الآتية ^(٣) :

١ - مبدأ تحصيل الحاصل *Principle of Tautology*

$$1.2 \quad (p \vee q) \supset p$$

أى أنه إذا كانت p قضية صادقة أو p صادقة فإن p صادقة

٢ - مبدأ الإضافة *Principle of Addition*

$$1.3 \quad q \supset p \vee q$$

إذا كانت q صادقة فإن p أو q صادقة

(١) Russell & whitehead : Principia , P. 12

(٢) Ibid, P, 94

(٣) Principia , PP. 98-97

٣ — مبدأ التبديل Principle of Permutation

$$1.4 \quad (p \vee q) \supset (q \vee p)$$

فإذا كانت p أو q صادقة فإن q أو p صادقة

٤ — مبدأ الترابط Associative Principle

$$1.5 \quad [p \vee (q \vee r)] \supset [q \vee (p \vee r)]$$

إذا كانت إما p صادقة أو q أو r ، صادقة ، فاذن تكون q صادقة أو p أو r ، صادقة .

مبدأ الجمع Principle of Summation

$$1.6 \quad (q \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]$$

أى إذا كانت q تتضمن r ، فإن p أو q ، تتضمن p أو r ،

وينبغى أن نلاحظ أن هذه المجموعة من القضايا تعد بمثابة أصول الاشتقاق فى النسق الاستنباطى لكتاب المبادئ ، وتستند نظرية حساب القضايا عليها لأنها تمثل الصدق الملقى الإبتدائى إلا أن هناك مجموعة من القضايا المشتقة سواء ما كان منها بسيطاً أو مركباً ، لا تعد بمثابة أصول الاشتقاق فى نسق المبادئ ، بل يمكن البرهنة عليها ، كما سنرى ، فى عرض طريقة البرهان الرياضى لنظرية حساب القضايا .

وطريقة البرهان فى نظرية حساب القضايا تسير وفق أحد طريقتين :

الطريقة الاولى : تكون إما عن طريق إحلال صيغة محل أخرى فى صورة القضية (١٢) والنسب تنص على أن .

$$(p \vee p) \supset p$$

يمكن أن نضع الصيغة $(p \vee q)$ بدلا من p فنحصل على

$$[(p \vee q) \vee (p \vee q)] \supset (p \vee q)$$

النظرية الثانية وتتمثل في قاعدة أثبات التالى *Modus Ponens* والتي تقررها القضية (١١) والتي تنص على أن أى شيء تتضمنه قضية أولية صادقة يكون صادقا.

11 Anything implied by a true elementary Proposition is true Pp

تلك هي القواعد الأساسية التى يسير وفقا لها جهاز البرهنة الرياضية لنظرية حساب القضايا، وسنحاول تطبيق هذه القواعد على بعض صور القضايا الأساسية فى كتاب المبادئ .

برهن على أن

$$p \supset p \vee p$$

البرهان

فى القضية رقم (١٣) والتي تنص على أن

$$q \supset (p \vee q)$$

نضع p بدلا من q فى هذه القضية بموجب القاعدة الأولى من قواعد البرهان فنحصل على .

$$p \supset (p \vee q)$$

ه . ط . ث

برهن على أن

$$p \supset p$$

البرهان

تنص القضية رقم (٥ ر ٢) على أن

$$(1) \quad (q \supset r) \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$$

نستخدم القاعدة الأولى من قواعد البرهان ونضع $(P \vee P)$ بدلا من q ، P بدلا من r . بالتعويض في (١) ينتج أن

$$[(P \vee P \supset P) \supset \{P \supset (P \vee P)\} \supset (P \supset q)]$$

∴ القضية الابتدائية رقم (١ ر ٢) صادقة وتنص على أن

$$(2) \quad (P \vee P) \supset P$$

∴ من (١) ، (٢) ، والقضية الابتدائية رقم ١ ر ١ نحصل على

$$(3) \quad [P \supset (P \vee P)] \supset (P \supset P)$$

∴ ، $P \supset (P \vee P)$ برهاننا من القضية السابق البرهنة عليها (٤)

∴ من (٢) ، (٣) ، (٤) وقاعدة إثبات التالي ينتج لدينا أن

$$P \supset P$$

م . ط . ث

برهن على أن

$$P \vee \sim P$$

البرهان

في القضية الابتدائية رقم (١ ر ٤) والتي تنص على أن

$$(p \vee q) \supset (q \vee p) \quad (1)$$

نضع $\sim P$ بدلا من P ، P بدلا من q في رقم (١) ينتج أن

$$(\sim P \vee P) \supset (P \vee \sim P) \quad (2)$$

، \therefore القضية $(\sim P \vee P)$ وهي القيضة رقم (٢، ١) صادقة برهاننا في نسق المبادئ.

\therefore فباستخدام قاعدة إثبات التالي في رقم (٢) ينتج لدينا

$$P \vee \sim P$$

ه. ط. ث

برهن على أن

$$P \supset \sim P \supset \sim P$$

البرهان

في القضية الابتدائية رقم (١، ٢) والتي تنص على أن

$$(P \vee P) \supset P \quad (1)$$

نضع $\sim P$ بدلا من P في رقم (١) ينتج لدينا أن

$$(\sim P \vee \sim P) \supset \sim P \quad (2)$$

، \therefore في (١، ٠١) $(p \supset q) = \sim p \vee q$ تعريفا (٣)

نضع $\sim P$ بدلا من q في (٣) ينتج أن

$$P \supset \sim P = \sim P \vee \sim P \quad (4)$$

بالتعويض في رقم (٢) عن $\sim p \vee \sim p = p \supset \sim p$ ينتج أن

$$p \supset \sim p \supset \sim p$$

هـ. ط. ث

برهن على أن

$$\sim p \supset q \supset \sim q \supset p$$

البرهان

٠٠ القضية رقم (٢٠٥) تنص على أن

$$(q \supset r) \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)] \quad (١)$$

، القضية رقم (٢١٢) - قانون النفي المزدوج - تنص على أن

$$p \supset \sim (\sim p) \quad (٢)$$

، القضية رقم (٢٠٣) تنص على أن

$$p \supset \sim q \supset q \supset \sim p \quad (٣)$$

بالتعويض في رقم (١) عن قيمة p بالقيمة p ، وعن قيمة r بالقيمة

$$(\sim q) \quad \sim$$

$$[q \supset \sim (\sim q)] \supset [(\sim p \supset q) \supset \{ \sim p (:) \}]$$

وبالتعويض في رقم (٢) عن قيمة p بالقيمة q ينتج أن

$$q \supset \sim (\sim q) \quad (٥)$$

من (٤) ، (٥) ، والقضية (١١١) ينتج أن

$$\sim p \supset q \supset \sim p \quad \sim (\sim q) \quad (٦)$$

نعوض عن قيمة p بالقيمة $\sim p$ ، وعن قيمة q بالقيمة $\sim q$ في رقم (٢) ينتج أن.

$$\sim p \supset \sim (\sim q) \supset \sim q \supset \sim (\sim p) \quad (٧)$$

نضع $\sim q$ بدلا من q ، $\sim (\sim p)$ بدلا من p ، p بدلا من $\sim p$ في رقم (١) ينتج أن

$$[\sim (\sim p) \supset p] \supset [\sim q \supset \sim \sim p] \quad (٨)$$

$$\supset (\sim q \supset p)$$

، القضية رقم (٢١٤) تنص على أن

$$\sim (\sim p) \supset p \quad (٩)$$

من (٨) ، (٩) ، القضية رقم (١١١) ينتج أن

$$\sim q \supset \sim \sim p \supset \sim q \supset p \quad (١٠)$$

بالتعويض في رقم (١) عن قيمة p بالقيمة $(\sim p \supset q)$ ، وعن قيمة q بالقيمة $[\sim q \supset \sim (\sim p)]$ ، عن قيمة p بالقيمة $[\sim q \supset \sim (\sim p)]$ ينتج أن

$$[(\sim p \supset \sim \sim q) \supset (\sim q \supset \sim \sim p)] \supset [\{(\sim p \supset q) \supset (\sim p \supset \sim (\sim q))\} \supset \{\sim p \supset q \supset \sim q \supset \sim (\sim p)\}] \quad (١١)$$

من رقم (٧) (١١) ، والقضية رقم (١١١) ينتج أن

$$[(\sim p \supset q) \supset (\sim p \supset \sim (\sim q))] \supset \sim p \supset q \supset \sim q \supset \sim (\sim p) \quad (١٢)$$

من رقم (٦) ، (١١) والقضية رقم (١١١) وينتج أن

$$\sim p \supset q \supset \sim q \supset \sim (\sim p) \quad (١٣)$$

نعوض من رقم (١) عن قيمة p بالقيمة $(\sim p \supset q)$ ، وعن قيمة q بالقيمة $[\sim q \supset \sim (\sim p)]$ ، وعن قيمة r بالقيمة $(\sim q \supset p)$ ينتج أن

$$[\{(\sim q \supset \sim (\sim p))\} \supset \{\sim q \supset p\}] \supset [\{(\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim (\sim p))\} \supset \{(\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset p)\}] \quad (١٤)$$

من (١٠) ، (١٤) ، القضية رقم (١١١) ينتج أن

$$(\sim p \supset q) \supset [q \supset \sim (\sim p)] \supset (\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset p) \quad (١٥)$$

من (١٣) ، (١٥) ، القضية رقم (١١١) ينتج أن

$$\sim p \supset q \supset \sim q \supset p$$

هـ ط. ث

تلك هي بعض صور البراهين الرياضية والتي تعد بمثابة الأساس الأول في مبادئ الرياضيات. لكن هل اكتفى رسل وهوايتهد بهذه الصور الأساسية للقضايا الابتدائية؟ أم أنه قد اشتقت منها صوراً أخرى وقضايا فرعية؟

الحقيقة أنه إذا كان كتاب المبادئ قد أوضح لنا الأسس الأولية للنسق الاستنباطي في صورته الأساسية ، فإنه ينبغي علينا أن نؤكد أن الصلة بين المنطقي

والرياضيات لعبت دوراً كبيراً في بلوره أسس وأبعاد المذهب اللوجستيقي، فالرياضيات كانت موضع اعتبار أصحاب المبادئ، والنظريات الرياضية سواء في الجبر أو الهندسة أو أى فرع من فروع الرياضيات البحتة *Pure Mathematics* تشتق منها نتائج أو لواحق، لها ما للنظرية من قوة وفاعلية، وتسمى نتائج أو لواحق لأنها تترتب عليها أو بمعنى أدق لأنها تنتج تحت ما هو أهم منها. لهذا فقد حاول رسل وهو يتهد أن يستنبط الصور الاشتقاقية للقضايا الأخرى والتي تعد جزءاً أساسياً من لجهاز الاستنباط لمبادئ الرياضيات، وقد اعتبرت المقاهيم الأساسية المطروحة في الجزء الأول من المبادئ بمثابة قواعد لا غنى عنها في متابعة النسق الاستنباطي للرياضيات في الجزأين الثاني والثالث، وهذا ما حدا برسل أن يقرر في مقدمة فلسفه الرياضه، أنه لا يمكن لنا أن تدب في مبادئ الرياضيات أين يبدأ المنطق وأين تنتهى الرياضيات. لقد أصبح لهذه الصيحه ما يبررها لأنه لم يعد بمقدور المناطقه والرياضيين معا أن يفصلوا أى من النسقين عن الآخر، بعد أن امتزج النسق الرياضى بالنسق المنطقى امتزاجاً تاماً، وبعد أن خلعت الرياضيات ثوبها على المنطق، في الوقت الذى تقلدت فيه رداء المنطق. فكان مذهب جبر المنطق لبول، ونزعة منطق الرياضيات لبيانوفريجه، قد إنصهرا معا في بوتقه المذهب اللوجستيقي.

والقضايا الاشتقاقية في حساب اللوجستيقا تتخذ صوراً متعدده ويمكن تصنيفها في المجموعات الآتية :-

المجموعة الأولى : مجموعة قوانين الفكر الأساسية *The laws of Thoughts*

وهذه المجموعه تشتمل على القوانين الثلاثة الأساسيه أضيف إليها قانوناً رابعاً :-

هو قانون النفي المزدوج . وهذه القوانين هي :-

law of Identity

١ — قانون الذاتية

2 . 08

$$p \supset p$$

law of Contradiction

٢ — قانون عدم التناقض

3 . 24

$$\sim (p \cdot \sim p)$$

law of Excluded Middle

٣ — قانون الثالث المرفوع

2 . 11

$$p \vee \sim p$$

law of Double Negation

٤ — قانون النفي المزدوج

4 . 13

$$p \equiv \sim (\sim p)$$

وقد سبق لنا البرهنة على هذه القوانين فيما عدا قانون عدم التناقض ويمكن

البرهنة عليه على النحو التالي :

في القضية رقم (٢٠١١) والتي تقرر ان

$$p \vee \sim p$$

نضع p بدلا من p فنحصل على

$$p \vee \sim (\sim p) \text{ ————— (١)}$$

وفي القضية رقم (٢٠١٤) حيث

$$\sim p \vee \sim q \supset \sim (p \cdot q)$$

نضع p بدلا من q فنحصل على

$$\sim p \vee \sim (\sim p) \supset \sim (p \cdot \sim p) \text{ ————— (٢)}$$

من (١)، (٢) وباستخدام قاعدة اثبات التالي نحصل على

$$\sim (p \cdot \sim p)$$

هـ . ط ث

المجموعة الثانية : وعمل بمجموعة القرائن المختة لصور التفكير . وضع
هذه المجموعة في أربعة صور أساسية .

(١) قانون النقل The law of Transposition

وله ثلاثة صور هي

$$4.1 \quad p \supset q \equiv \sim q \supset \sim p$$

$$4.11 \quad p \equiv q \equiv \sim p \equiv \sim q$$

$$4.14 \quad [(p \cdot q) \supset r] \equiv [(p \cdot \sim r) \supset \sim q]$$

(٢) قانون تحصيل الحاصل The law of Tautology

وله صورتان

$$4.24 \quad p \equiv p \cdot p$$

$$4.25 \quad p \equiv p \vee p$$

وهذا القانون من وجهة النظر الصورية البحت وما يرتب عليه من نتائج
يخرج المطلق عن الجبر العادي ordinary algebra

(٣) قانون الامتصاص The law of absorption

$$4.71 \quad (p \supset q) \equiv [p \equiv (p \cdot q)]$$

وبينما هذا القانون في تحويل صور التضمن إلى صور التكافؤ equivalence

(٤) قانون التوزيع The distributive law

وله صورتان

$$4.4 \quad [p \cdot (p \vee r)] \equiv [(p \cdot q) \vee (p \cdot r)]$$

$$4.41 \quad [p \vee q] \cdot (p \vee r) \equiv [(p \vee q) \cdot (p \vee r)]$$

المجموعة الثالثة مبادئ خاصة بقواعد القياس Syllogism

وتنحصر هذه المجموعة في صورتين

(١) مبدأ القياس Principle of the Syllogism

وله صورتان

١ — الصورة الأولى

$$2.08 \quad (q \supset r) \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$$

ويمكن البرهنة على هذه الصورة على النحو التالي

لنضع $p \sim$ بدلا من p فنحصل على

$$(1) \quad (q \supset r) \supset [(\sim p \supset q) \supset (\sim p \supset r)]$$

... تعريف التضمن في القضية رقم (١٠١) ينص على أن

$$p \supset q \equiv \sim p \vee q$$

∴ يمكن إستبدال الصيغة $(\sim p \supset q)$ بالصيغة $(\sim p \vee q)$ ،

وكذلك تستبدل الصيغة $(\sim p \supset r)$ بالصيغة $(\sim p \vee r)$

فصبح صيغة المعادلة رقم (١) هي

$$(2) \quad (q \supset r) \supset [(\sim p \vee q) \supset (\sim p \vee r)]$$

من رقم (٢)، والقضية (١٠١) وتعريف التضمن في (١٠١) نحصل على

$$(q \supset r) \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$$

هـ . ط . ث

الصورة الثانية

2. 08

$$(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$$

(٢) برهان الخلف Reductio ad absurdum

2. 01 $| p \supset (\sim p) | \supset \sim p$

المجموعة الرابعة لواحق القياس

وتستخرج في خمس صور من المبادئ الأساسية : ٤

(١) مبدأ التصدير Principle of exportation

ويرجع هذا المبدأ إلى يانو

3. 3 $| (p \cdot q) \supset r | \supset | p \supset (q \supset r) |$

(٢) مبدأ الاستيراد Principle of Importation

ويرجع إلى يانو أيضا

3. 31 $| p \supset (p \supset r) | \supset | (p \cdot q) \supset r |$

(٣) مبدأ التقرير Principle of assertion

3-85 $p \cdot (p \supset q) \supset q$

(٤) مبدأ التركيب Principle of Composition

ويرجع إلى يانو

$$3. 49 \quad [(p \supset q) . (p \supset r)] \supset [p \supset (p . r)]$$

Principle of Factor مبدأ العامل (٥)

ويرجع إلى يانو

$$3. 47 (p \supset r) . (q \supset S) \supset [(p . q) \supset (r . S)]$$

المجموعة الخامسة مبادئ متصلة بالقياس ولواحقه وتنحصر في مبدئين :-

(١) مبدأ التبسيط Principle of Simplification

$$2. 03 \quad q \supset (p \supset q)$$

(٢) مبدأ الاتصال Commutative Principle

$$2. 04 \quad [p \supset (q \supset r)] \supset [q \supset (p \supset r)]$$

هذا إلى جانب مجموعة القوانين الأساسية الخاصة بالضرب المنطقي Logical

Product ، تعريف الضرب المنطقي وهي

$$. 2 \quad p \supset [q \supset (p . q)]$$

$$. 26 \quad (p . q) \supset p$$

$$3. 27 \quad (p . q) \supset q$$

$$3. 01 \quad (p . q) = \sim (\sim p \vee \sim q) \text{ Df}$$

الفصل الثاني

نظرية حساب المحمول

الفصل الثاني

نظرية حساب المحمول

Theory of Predicate Calculus

أحدث كتاب «مبادئ الرياضيات» ، تطوراً هائلاً في الأبحاث الرياضية والمنطقية على السواء. ذلك أن هذا المؤلف الضخم ، كان بمثابة حجر الزاوية في تحديد المصطلحات والمفاهيم المنطقية والرياضية التي درج المناطقة والرياضيين على تناولها في أبحاثهم بلا تمحيص أو تدقيق ، ومن ثم فقد لعب دوراً هاماً في تطور المنطق الرياضي^(١) ، وقد استطاع رسل وهو أيتهد في هذا المؤلف أن يقدم لنا الرياضيات كفرع من المنطق^(٢).

والحقيقة التي لا يجب أن نسقطها من حسابنا ، ونحن بصدد تناول كتاب المبادئ ، تمثل في أن هذا الكتاب يعد بحق يدايه عهد جديد للأبحاث المنطقية ، لأنه أحدث ثورة ضخمة في مجال المنطق ، لا تقل بحال من الأحوال عن تلك الثورة التي أحدثها «نقد العقل الخالص» ، لكانط في مجال الاستمولوجيا ومباحثها. ونظرية حساب المحمول من النظريات الحديثة التي بدأت مع بداية مبادئ الرياضيات ، فتد أن تبين رسل أن القضية العامة هي في جوهرها قضية شرطية متصلة ، إتجه إلى صياغة أفكاره المنطقية صياغة جديدة.

(1) Ayer, A. J., An Appraisal of Bertrand Russell's Philosophy, p. 171, ed in "Schoenman Volum" 1967.

(2) Bloch, W., Russell's Concept of Philosophy, p. 153-154, ed. in "schoenman valum"

وتمتلك نظرية حساب المحمول عن نظرية حساب القضايا إختلافا جوهريا ،
فنحن في حساب القضايا نتناول القضية كلها كوحدة واحدة ، ونضع لها رمزا
واحدا ، ثم نقوم بعملية حساب قيم المصدق أو الكذب في ضوء علاقة القضية
بقضية أخرى مرتبطة معها بأحد ثوابت الوصل أو الفصل أو التضمن أو التكافؤ .
على حين أن حساب المحمول يتناول حدود Terms القضية كل على حده ، ويضع
رموزا للموضوعات وأخرى للمحمولات ، كما ويرمز للسور السكلى Universal
quantifier والسور الجزئي Existential quantifier في القضية ، وهذا مالا نجد
في نظرية حساب القضايا .

وعلى هذا الأساس فإن حساب المحمول ينفذ إلى بناء القضية ككل ، وبالتالي
تعتبر نظرية حساب المحمول في حد ذاتها أعم من نظرية حساب القضايا ، لأنها
تتناول القضية كلها في لغة رمزية متكاملة ، فضلا عن أن النظرية ذاتها يمكن التعبير
عنها بنفس القوانين المستخدمة في نظرية حساب القضايا .

وبما لا شك فيه أن رسل قد عرض بعض أفكاره الخاصة بهذه النظرية
في مقاله التي نشرها عام (١٩٠٨) تحت عنوان (١) ، المنطق الرياضي مستندا إلى
نظرية الأنماط ، إلا أنه طور النظرية ، فيما بعد ، تطورا دقيقا في « مبادئ
الرياضيات » (٢) ، في القسم الثاني من الجزء الأول تحت اسم « نظرية المتغيرات
الظاهرية » ، Theory of Apparent variables ، وعلى هذا الأساس فإننا
سنحاول أن نقدم شرحا لأبعاد نظرية حساب المحمول كما تطورت من خلال
أفكار رسل .

(1) Russell, B., Logic and Knowledge, pp. 59-102, (Marsh. vol).

(2) Principia, pp. 127-160.

توجد لدينا في نظرية حساب المحمولات عدة أنواع من الرموز المستخدمة
يمكن عرضها على النحو التالي .

١ - رموز للتوابع الفردية Individual variables مثل $x \cdot y \cdot z$

٢ - رموز لنتائج الخلية Predicate variables مثل $F \cdot G \cdot H$

٣ - رمز لعدد الكلى Universal quantifier بالرمز (x) الذي
يعبر إلى كلمة (كل) .

٤ - رمز لعدد الجزئى Existential quantifier بالرمز (\exists) وهو
يعبر إلى كلمة (بعض) .

٥ - رموز لتوابع المنطق Logical Constants وهي ذاتها لرموسوز
المستخدمة في حساب القضايا $\neg, \vee, \wedge, \supset, \equiv$.

والرمز الذي يرمز به لعدد الجزئى القضية ، إنما هو في الواقع يرمز إلى
العدد . أو الشيء الجزئى الذي تنسب إليه خاصية ما ، على حين أن الرمز الذي
يرمز به لعدد الكلى ، إنما يرمز مباشرة إلى الأشياء المقصودة في القضية .
وبلاحظ أنه حينما نقوم بكتابة القضية في صيغة رمزية ، فإننا تقدم المحمول في
العبارة ونأتي بالموضوع بعده ، فلما أردنا أن نبر عن القضية «سقراط حكيم»
في صيغة رمزية بلغة حساب المحمول ، قلنا $(\exists x)$ حيث x تشير إلى المحمول ،
 x تشير إلى الموضوع .

وعلى هذا الأساس فإنه يمكن لنا أن نبث صور القضايا الأربعة التقليدية ،
الكلية الموجبة ، الكلية السالبة ، الجزئية الموجبة ، والجزئية السالبة ، في ضوء
الأفكار التي عرضنا لها .

أولاً : القضية الكلية الموجبة :

انتهى أرسطو ، وهو بصدد تصنيفه النهائي للقضايا الخلية ، إلى اعتبار أن الصور الأربعة للقضايا الخلية تعتبر بمثابة أبسط صور القضايا ، والتي لا يمكن أن تنحل إلى ما هو أبسط منها ، على حين أنه اتضح ، فيما بعد ، لا صاحب المنطق الرمزي ، أن تلك الصور ليست في حقيقتها صوراً بسيطة ، لأنه قد تبين أن القضية العامة أو الكلية إنما هي في حقيقة أمرها قضية شرطية متصلة ، تعبر عن علاقة بين دالتين قضيتين ، تصبح كل من الدالتين قضية حملية حين تتعين قيمة المتغير (١) . ومن ثم لم تصبح القضية العامة حملية بالمعنى الدقيق ، وإنما هي شرطية متصلة ، على حين أن الخلية هي الشخصية Singular . فموضوع القضية العامة إذن ليس اسم علم ، على حين أن موضوع القضية الشخصية اسم علم ، حيث تقوم في القضية الشخصية بانسناد محمول إلى اسم علم ، أو شيء جزئي له وجود في الواقع ، وهذا ما جعل رسل يقرر أن القضايا ذات الصورة (كل ا هي ب) ليست حملية بالمعنى الدقيق ، لكنها تعبر عن علاقة بين محمولات ، (٢) .

فاذا قلنا كل إنسان مفكر ، فإن كلمة (إنسان) في هذه القضية هي محمول أيضاً شأنها في ذلك شأن (مفكر) تماماً ، لأنه يمكن أن نترجم هذه القضية على النحو التالي : إذا كان x إنسان ، فإن x مفكر . نفسر هذا القول بأنه إذا ما حملنا صفة الإنسانية على (x) وليكن محمداً ، مثلاً ، فإنه لا بد وأن نحمل عليه أيضاً صفة كونه مفكراً .

(1) Russell, B., My Philosophical Development, p. 66.

(2) Russell, B., On the Relations of Universals to Particulars, p. 123, ed. in "Marsh, vol".

وعلى هذا الأساس فإن القضية وكل إنسان مفكر، والتي اعتبرها التقليديون ، قضية حليية ، إنما هي في جوهرها قضية شرطية متصلة ، يمكن التعبير عنها في صورة التضمن ، ومن ثم فإنه يمكن تفسير القضية السابقة من وجهة نظر حساب المحمول على النحو التالي :

$$(x) [f x \supset g x]$$

أى أنه في كل قيم (x) إذا كانت (x) تتصف بالخاصية (f) فإن ذلك يتضمن أن (x) لا بد وأن تتصف بالخاصية (g) .

في الصيغة الرمزية السابقة ترمز (x) إلى سور القضية (كل) ، وفي (f x) فإن (x) ترمز إلى اسم العلم ، وترمز (f) إلى المحمول لإنسان ، وترمز (g) إلى المحمول مفكر .

ثانيا : القضية الكلية السالبة

إن ما ينطبق على القضية الكلية الموجبة ، ينطبق بالضرورة على الكلية السالبة ، إلا أن صياغة هذه القضية تختلف عن الكلية الموجبة في ناحية السلب فقط ، فإذا قلنا لا إنسان مفكر ، فإن هذه القضية يمكن وضعها في الصيغة الرمزية التالية

$$(x) [f x \supset \sim g x]$$

وتفسير هذه الصيغة أنه في كل قيم (x) إذا كانت (x) تتصف بالخاصية (f) فإن ذلك يتضمن أن (x) غير متصف بالخاصية (g) ،

ثالثا : القضية الجزئية الموجبة :

القضية الجزئية ، كما اعتبرها المنطق الرمزي ، إنما هي قضية مركبة من قضيتين حليتين ، مرتبطتين معا بواو العطف ، أى ثابت الوصل . فالقضية بعض الطلاب ناجحون ، يمكن أن نضعها في الصيغة الرمزية الآتية :

$$(\exists x) [Ex \cdot gx]$$

ونفس هذه الصيغة كما يلي : « يوجد فرد واحد على الأقل (x) مما يكون متصفا بالخاصية (g) والخاصية (f) معا » .

رابعاً : القضية الجزئية السالبة

تختلف صورة القضية الجزئية السالبة عن الجزئية الموجبة في ناحية السلب ، ذلك أن هذه القضية في حد ذاتها تخضع لحكم السلب . والقضية « بعض العرب ليسوا أحرار » يمكن أن نضعها في الصياغة الرمزية الآتية :

$$(\exists x) [fx \cdot \sim gx]$$

وهذه الصيغة نفسها كما يلي : « يوجد فرد واحد على الأقل (x) مما يكون متصفا بالخاصية (f) ولا يكون متصفا بالخاصية (g) » .

والصورة الرمزية السابقة تساوى الصورة الآتية :-

$$\sim (\forall x) [fx \supset gx]$$

لأنه إذا قلنا أن « بعض العرب ليسوا أحرار » فإن هذه الصيغة تساوى قولنا « من الكذب أن تقول عن كل عربي أنه حر » .

يتضح لنا مما سبق أن حساب المحمول يعتمد أساساً على فكرتي « صادق دائماً ، always true » و « صادق أحياناً ، Sometimes true » ، كما وأن الطريقة البرهانية المتبعة في نظرية حساب المحمول هي ذاتها المتبعة في نظرية حساب القضايا .

لكنه إذا ما نظرنا إلى نظرية القياس الأرسطية ، لوجدنا أن القياس بصفة عامة صورة استدلالية موصلة لليقين المطلق ، ومن ثم فقد اعتبر عملية عقلية خالصة تصبح فيه الصحة الصورية مطلباً أساسياً .

والقياس ، كما نعلم يستند إلى قوانين الفكر 'الأساسية' ، التي تفترض مقدما ثبات الموجودات وخضوعها لنظام عقلي يتجاوز مع النظام العقلي الذي يفترضه المنطق.

ورغم أن أرسطو كان أول من وضع نظرية القياس في قالبها وصورتها النهائية ، إلا أنه بطبيعة الحال لم يكن أول من استدل قياسيا (١) ، فالناس يستخدمون الأسلوب القياسي في حياتهم العملية دون إدراك منهم لحقيقته تامة ، لكن عبقرية أرسطو في هذا الجانب من جوانب فكره ترجع إلى كونه ، قد استخلص القوانين والقواعد والشروط التركيبية اللازمة لصحة القياس ؛ وقد تكون الإرهاصات الأولى للمنطق الصوري ، بصفة عامة ، قد صدرت عن مدارس الجدل السفسطائي ومن ثانيا الهأورات الأفلاطونية .

وإذا ما حاولنا تتبع نظرية القياس الأرسطية في الفكر الأرسطي ذاته ، لوجدنا أن أرسطو قد أودع نظريته في القياس ، الفصول الأربعة الأولى من التحليلات الأولى ، وليس هناك شك في أن نظرية القياس الأرسطية قد ظلت موضع الاعتبار والدراسة والبحث من جانب المفكرين على اختلاف نزعاتهم ومدارسهم ومذاهبهم . ولم يكتب لمحاولات الخروج على قالب الفكر الأرسطي التراجع إلا مع بداية العقود الأولى من القرن العشرين ، حيث صدرت مباحث الرمزية Symbolism تحت تأثير الدواعي الرياضية ، ومحاولة العثور على الأسس المنطقية للرياضيات .

والقياس نوع من الاستدلال غير المباشر ، وهو بحسب أرسطو ، « قول متق

(١) . هـ . محمد علي أبوريان ، د . علي عبد المعطي ، أسس المنطق الصوري ، ص ٢٢٩ .

وضعت فيه أشياء معينة تتج عنها بالضرورة شيء آخر ، (١) .

إلا أن تعريف القياس الأرسطى ، على هذا النحو ، قد أثار بعض الجدل في دوائر الفكر المنطقي ، لأنه قد ينطبق على غيره من صور الاستدلال الغير قياسى (٢) . والحقيقة التى تفصح عن ذاتها ، أن أرسطو قد وضع تعريف القياس أولا ، ثم أخذ بعد ذلك يشرع فى تحديد شروطه . وجوانب صحة ، وفى هذا ما يشجب التعريف ذاته ، ذلك لأن أرسطو ، ومن قبله سقراط وأفلاطون ، كانوا يطالبون بالتعريف الجامع المانع . وتعريف أرسطو بصورته الأولية ، وإن اعتبر جامعا ، إلا أنه لا يعتبر مانعا لغير صور الاستدلال القياسى من الدخول تحت القياس .

والقياس إما أن يتألف من نوع واحد من القضايا ، وهذا القسم يشتمل على القياس الحلى والشرطى بنوعية المتصل والمنفصل . وإما أن يتألف من أكثر من نوع واحد من القضايا ، وهذا القسم يشمل القياس الاستثنائى بأنواعه المختلفة .

والقياس الحلى يتألف من ثلاثة قضايا حملية تشتمل على ثلاثة حدود ، أو من مقدمتين ونتيجة ، والحدود الثلاثة هى الأكبر Major والأوسط Middle والأصغر Minor ، ولا يظهر الحد الأوسط فى النتيجة .

ومن اعتبار وضع الحد الأوسط ، وضع أرسطو ثلاثة أشكال قياسية ، أضاف إليها جالينوس ، فيما تلاه من العصور شكلا رابعا .

والشكل الأول من أشكال القياس ، هو الشكل الوحيد الذى نجد فيه الموضوع الذى ، تحتويه النتيجة ، موضوعا فى المقدمة الصغرى ، ويكون محولها ، محولا فى

(1) Priori Analytics, 24b, 20 .

(2) Bradley., Principles of logic, Book II, ch 4. 108 .

المقدمة الكبرى. واتخذ عول أرسطو تماماً على هذا الشكل، من حيث أنه ينتج القضايا بجميع أنواعها، كما وأنه ينتج لنا الكلية الموجبة، التي تعتمد عليها العلوم الاستنباطية *Deductive sciences*، فيما يرى كينز (١). ولهذا السبب اعتبرة أرسطو أكمل الأشكال، وإليه ترد كل من ضروب الشككين الثاني والثالث.

أما الشكل الثاني، فإنه ينتج لنا القضايا السالبة فقط، ومن ثم يكتبر استخدامه في الجدل، وفي هذا الشكل نجد محمول النتيجة هو في الأصل موضوع المقدمة العكبرى.

أما الشكل الثالث فنجد فيه موضوع النتيجة هو في الأصل محمول المقدمة الصغرى، وهذا الشكل لا ينتج لنا إلا القضايا الجزئية، تلك التي تستخدم لأغراض لإبطال البرهان (٢).

والشكل الرابع من أشكال القياس — والذي وضعه جالينوس — ينتج لنا جميع القضايا فيما عدا الكلية الموجبة التي يختص بإنتاجها الشكل الأول، وقد رفض بعض المناطقه باعتبار هذا الشكل (٣).

والسؤال الآن: هل يمكن لنا معرفة إنتاج الضروب، من عدمه، في الأشكال القياسية الأربعة، في ضوء اعتبار القضية الكلية، شرطية متصلة، كما اتضح لأصحاب المنطق الرمزي؟

يمكن لنا أن نتقدم خطواته إلى الأمام لنفحص الضروب في الأشكال القياسية الأربعة لتتضح أمامنا معالم الطريق نحو معرفة المنتج من الضروب، والفاقد منها.

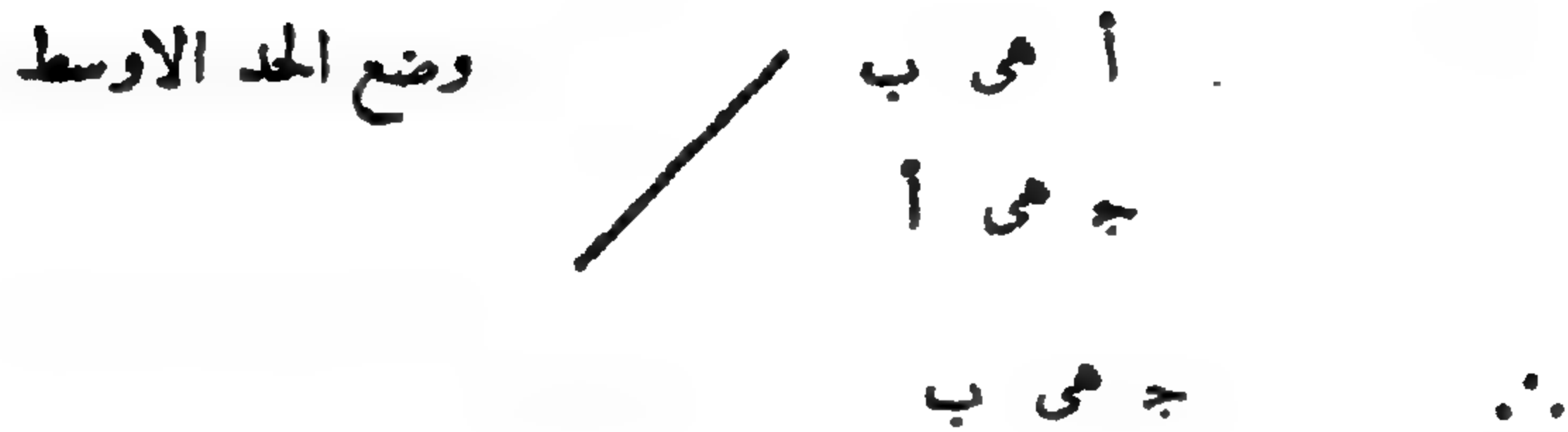
(1) Keynes., Formal logic, p. 315

(2) Ib.d, p. 310

(3) Ibid, p. 316

أولا : الشكل الاول

لهذا الشكل من أشكال القياس موضعه الهام لدى أرسطو في نظرية القياس بوجه عام ، ذلك لأنه الشكل الوحيد الذى ينتج لنا القضية الكلية الموجبة ، كما ترد إليه الأشكال الأخرى ، والصورة الرمزية العامة لهذا الشكل تأخذ الصيغة التالية :



والضروب المتاحة في الشكل الاول من أشكال القياس أربعة وهى .

Barbara — Celarent — Darii — Ferio

١ — الضرب الاول — الشكل الاول Barbara

يمكن لنا توضيح صورة هذا الضرب القياسى بالمثال التالى

$$\begin{array}{c} \text{كل أ هـ ب} \\ \text{كل ح هـ أ} \\ \hline \text{∴ كل ح هـ ب} \end{array}$$

هذا الضرب يمكن صياغته من وجهة نظر نظرية حساب المحمول على

النحو التالى :

$$\begin{array}{c} (x) [f x \supset g x] \\ (x) [h x \supset f x] \\ \supset \\ (x) [h x \supset g x] \end{array}$$

ويمكن لنا وضع هذا القياس في معادلة واحدة على النحو التالي :

$$[(x)(f x \supset g x) \quad (x)(h x \supset f x) \supset (x)(h x \supset g x)]$$

يمكننا تفسير الصيغة السابقة على النحو التالي :

د في كل قيم x إذا كانت x تتصف بالخاصية f فإن هذا يتضمن أيضا أن x تتصف بالخاصية g ، وكذلك فإنه في كل قيم x إذا كانت x تتصف بالخاصية h فإن هذا يتضمن أيضا أن x تتصف بالخاصية f وهذا يتضمن أنه في كل قيم x إذا كانت x تتصف بالخاصية h فإن ذلك يتضمن أنها تتصف بالخاصية g ،

وفي ضوء هذا التفسير الرمزي يمكن لنا صياغة المثال الذي أشرنا إليه كما يلي :

د أن كل شيء نقول عنه أنه f فإن هذا القول . يتضمن أن هذا الشيء f ، كما وأن كل شيء نقول عنه أنه h فإن هذا يتضمن كونه f . وهذا يتضمن بالضرورة أن كل شيء متصف بصفة كونه h ، فإن هذا يتضمن أيضا أنه f .

نجد من هذا الصياغة ، أن التفسير مطول بدرجة لا تمكثنا من إعادة تكرارها في صياغة كل ضرب من ضروب القياس . ومع هذا فإنه يمكننا معرفة ما إذا كان هذا الضرب القياسي منتج ثم وسد زد ما وضعنا الصيغة الرمزية السابقة في قائمة صدق ، فإذا ظهرت قيمة لدب واحدة تحت ثابت تتضمن الرئيسي ^(١) ، فإن

(١) وثابت العنصر الرئيسي هو ما توصفه بنا قيم تصدق و التكذب تحت العمود رقم

(٨) في كل قوائم صروب - لأشكال الأرب و يشار به تصدق بالرمز T ، ولك

الكذب بالرمز F

الضرب القياسي يكون فاسدا .

والصيغة الرمزية للضرب Barbara يمكن وضعها في صياغة أخرى من وجهة نظر نظرية حساب القضايا فتأخذ الصورة التالية .

$$[(p \supset q) \cdot (R \supset p)] \supset (R \supset q)$$

يلاحظ هنا أن هذه الصيغة تحتوي على ثلاثة متغيرات

p, q, R

ومن ثم فإن لها ثمانى قيم للصدق أو الكذب .

قائمة الصدق

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$[(p \supset q) \cdot (R \supset p)] \supset (R \supset q)$	p	q	\cdot	$(R \supset p)$	\supset	$(R \supset q)$	\supset	$(R \supset p)$	\supset	q
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	T	F	T	F	F
T	F	F	F	F	T	T	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F

يتضح لنا من قائمة الصدق السابقة أن كل القيم تحت ثابت التضمن الرئيسى في

العمود رقم (٨) كلها قيم صدق، ومن ثم فإن هذا الضرب صحيح أى أنه بصحة

٢ — الضرب الثاني. من الشكل الأول Celarent

مثال هذا الضرب

E لا ا هي ب
 A كل ح هي ا

 E لا ح هي ب

هذا الضرب يضع له حساب المحمول الصياغة التالية

$$[(x)(fx \supset \sim gx) \cdot (x)(hx \supset fx)] \supset (x)(hx \supset \sim gx)$$

وهذه الصياغة من وجهة نظر نظرية حساب القضايا تصبح

$$[(p \supset \sim q) \cdot (R \supset p)] \supset (R \supset \sim q)$$

يمكن لنا وضع قائمة صدق هذه الصيغة على النحو التالي لنعرف إنتاج هذا

الضرب من عدمه .

قائمة الضيق

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$[(P$	\supset	$\sim q$	\cdot	$(R$	\supset	$P)]$	\supset	$(R$	\supset	$\sim q)]$
	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
	F	F	F	F		T	T	F	T	F
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	F	T	T		F	T	T
F	F	F	F	T	F		T	T	F	F
F	T	F	T		T	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F		F	T	T

يُضخ لنا من هذه القائمة أن هذا الضرب صحيح ومنتج

٣ - الضرب الثالث من الشكل الأول Darii

مثال هذا الضرب

A كل أ هي ب

I بعض ح هي أ

I . بعض ح هي ب

نبر عن هذا الضرب رمزياً وفقاً لنظرية حساب المحمول كما يلي

$$[(x)(fx \supset gx) \cdot (\exists x)(hx \cdot fx)] \\ \supset (\exists x)(hx \cdot gx)$$

تختلف هذه الصيغة عن صيغة الضروب الكلية في أن سور القضية جزئي ويرمز

له بالرمز $(\exists x)$ أى د في بعض قيم x .

نضع هذه الصيغة في صورة حساب القضايا على النحو التالي

$$[(p \supset q) \cdot (R \cdot p)] \supset (R \cdot q)$$

قائمة الصلوق

$[(p$	\supset	$q)$	\cdot	$(R$	\cdot	$p)$	\supset	$(R$	\cdot	$q)$
T	T		T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	F	F	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	F	T	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	F	T	F	F	T
F	T	F	F	T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	F	F	T	F	F	F

نجد هنا أن كل التقييم تحت ثابت التضمن الرئيس هي قيم صدق ومن ثم فإن
الضرب الثالث من الشكل الأول منتج .

٤ — الضرب الرابع من الشكل الأول **Ferio**

E	لا أ هي ب
I	بعض ح هي أ
<hr/>	
O	ليس بعض ح هي ب

يمكن لنا صياغة هذا الضرب على النحو التالي :

$$[(x) (fx \supset \sim gx) \cdot (\exists x) (hx \cdot fx)] \supset (\exists x) (hx \cdot \sim gx)$$

وتصبح هذه الصيغة وفقا لنظرية حساب القضايا كما يلي :

$$[(p \supset \sim q) \cdot (R \cdot p)] \supset (R \cdot \sim q)$$

قائمة الصدق

$(p$	\supset	\sim	\cdot	$(R$	\cdot	$p)$	\supset	$(R$	\cdot	\sim
T	F	F	F	T	T	F	T	T	F	F
T	F	F	F	F	F	T	T	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	F	F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	F	T	F	F	T

يوضح لنا من قائمة الصدق السابقة أن الضرب الرابع Ferio من الشكل الأول صحيح ومنتج ذلك أن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيسى إنما هي قيم صدق. ومن ثم فإنه قد أوضح لنا أن الضروب الأربعة التي اعتبرها أرسطو ضروبا منتجة في الشكل الأول. إنما هي كذلك من وجهة نظر حساب المحمول بعد أن أجرينا عليها عمليات التحليل في قوائم الصدق وفقا للشروط التي تحددها الثوابت المنطقية.

ثانيا : الشكل الثانى Second figure

الصورة الرمزية العامة لهذا الشكل

وضع الحد الأوسط	أ هي ب
	ح هي ب
	ب. ح هي أ

ذهب أرسطو إلى أن الضروب المنتجة في هذا الشكل إنما هي أربعة ضروب وهي على الترتيب .

Cesare - Camestres - Festino - Baroco

ويمكن لنا أن تبين إنتاج هذه الضروب من فسادها إذا ما أجرينا عليها عملية التحليل في قوائم الصدق .

١ - الضرب الأول من الشكل الثاني Cesare

E	لا ا هي ب
A	كل ح هي ب
<hr/>	
E	لا ح هي ا

صفة هذا الضرب تأخذ الصورة التالية من وجهة نظر حساب المحمول .

$$[(x)(fx \supset \sim gx) \cdot (x)(hx \supset gx)] \supset (x)(hx \supset \sim fx)$$

ومن وجهة نظر حساب القضايا تصبح .

$$[(p \supset \sim q) \cdot (R \supset q)] \supset (R \supset \sim q)$$

وقائمة صدق هذا الضرب تأخذ القيم التالية :

$[(P$	\supset	$\sim q)$	\cdot	$(R$	\supset	$q)]$	\supset	R	\supset	$\sim q)$
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	T	T	T	F	T	F
T	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
T	T	T	T	F	T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T	F	T	F	F
F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F	T	F	T	T

يُتضح لنا من هذه القائمة أن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيس هي قيم صدق فيما عدا قيمة واحدة هي قيمة كذب ومن ثم فإن الضرب القياس قاسد .

٢ — الضرب الثاني من الشكل الثاني Camestres

ومثال هذا الضرب

$$\begin{array}{rcl} A & \text{كل } a \text{ هي } - & \\ E & \text{لا } h \text{ هي } - & \\ \hline E & \therefore \text{لا } h \text{ هي } a & \end{array}$$

صيغة هذا الضرب

$$[(x) (fx \supset gx) - (x) (hx \supset \sim gx)] \supset (x) (hx \supset \sim fx)$$

وفي صيغة حساب القضايا تصبح

$$[(p \supset q) - (R \supset \sim q)] \supset (R \supset \sim q)$$

وقائمة صدق هذه الصيغة تصبح على النحو التالي

$(p$	\supset	$q)$	\cdot	$(R$	\supset	$\sim q)$	\supset	$(R$	\supset	\sim	$)$
T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F	
T	T	T	T	F	T	F	T	F	T	F	
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F	
T	F	F	F	F	T	T	T	F	T	F	
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T	
F	T	T	T	F	T	F	T	F	T	T	
F	T	F	T	T	T	T	T	T	T	T	
F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	T	

نوضح لنا قائمة الصدق السابقة أن كل القيم تحت ثابت التضمن الرئيسي إنما هي قيم صدق ومن ثم فإن الضرب Camestres صحيح ومنتج من وجهة نظرية حساب الحول.

٣ - الضرب الثالث من الشكل الثاني Festino

لا أ هي ب E

بعض ح هي ب I

ليس بعض ح هي أ O

هذا الضرب القياسي يمكن وضعه في الصيغة التالية

$$[(x)(fx \supset \sim gx) \cdot (\exists x)(hx \cdot gx)] \supset (\exists x)(hx \cdot \sim fx)$$

وتأخذ هذه الصياغة الصورة التالية وفقا لنظرية حساب القضايا

$$[(p \supset \sim q) \cdot (R \cdot q)] \supset (R \cdot \sim p)$$

وقائمة صدق هذا الضرب توضع على النحو التالي

$\sim p$.	(R	\supset	$[(p \supset \sim q) \cdot (R \cdot q)]$.	(R	.	$\sim q$	\supset	(p
F	F	T	T	T	T	T	T	F	F	T
F	F	F	T	T	F	F	F	F	F	T
F	F	T	T	T	F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	F	F	F	T	F	T
T		T	T	T	T	T	F	F	T	F
T		F	T	T	T	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	F	F	T	F	T	F
T	F	T	T	T	F	T	F	T	T	F

من قائمة الصدق السابقة نجد أن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيسي في العمود رقم (٨) أنها هي قيم صدق ، ومن ثم فإن الضرب Festiro صحيح ومنتج

٤ — الضرب الرابع من الشكل الثاني Baroco
صورة هذا الضرب القياسي تتضح لنا من المثال التالي

كسل أ هي ب
ليس بعض ح هي ب
—————
ليس بعض ح هي أ

وصيغته الرمزية هي :

$$[(x)(fx \supset gx) \cdot (\exists x)(hx \cdot \sim gx)] \supset (\exists x)(hx \cdot \sim fx)$$

ومن وجهة نظر حساب القضايا تكون

$$[(p \supset q) \cdot (R \cdot \sim q)] \supset (R \cdot \sim p)$$

وقائمة صدق هذا الضرب توضح لنا إنتاجه من فساد.

$[(p \supset q) \cdot (R \cdot \sim q)]$	\supset	$(R \cdot \sim p)$
T	T	F
T	T	F
T	F	F
T	F	F
F	T	T
F	T	T
F	T	T
F	T	T

من القائمة السابقة يتضح لنا أن الضرب الرابع Baroco من الشكل الثاني متبع وصحيح لأن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيس هي قيم صدق .

ثالثا : الشكل الثالث Third Figure

لا ينتج لنا هذا الشكل سوى الجزئيات ، والصورة العامة لهذا الشكل هي

وضع الحد الأوسط

ب هي ح	
ب هي ا	
ب هي ح	

والضروب التي اعتبرها أرسطو متبعة في هذا الشكل ستة ضروب هي

Datisi -- Disamis — Darapti — Felapton — Bocardo — Ferison

ويمكن لنا برفعة انتاج هذه الضروب من فسادها عن طريق وضعها في الصيغ الرمزية وإخضاعها للتحليل عن طريق قوائم الصدق .

٢ — الضروب الأول — من الشكل الثالث Datisi

A	كل ا هي و
I	بعض ا هي ح
I	بعض ح هي ب

صيغة هذا المثال من وجهة نظر نظرية حساب المحمول

$$[(x) (f x \supset g x) \cdot (\exists x) (f x \cdot h x)] \supset (\exists x) (h x \cdot g x)$$

وهذه الصيغة وفقا لنظرية حساب القضايا تصبح

$$[(p \supset q) \cdot (p \cdot R)] \supset (R \cdot q)$$

وقائمة الصدق هي التي توضح لنا انتاج هذا الضرب من عدمه .

[(q	\supset	q)	.	(p	.	R)]	\supset	(R	.	q)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	F	T	F	F	T
F	T	F	F	F	F	T	T	T	F	F
F	T	F	F	F	F	F	T	F	F	F

يتضح لنا من هذه الصيغة التحليلية أن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيس إنما هي قيم صدق ومن ثم فإن الضرب القياس *Datisi* من الشكل الثالث متبع وصحيح .

٢- الضرب الثاني - الشكل الثالث Disamis

ومثال هذا الضرب

$$\begin{array}{r} \text{بعض ا هي ب} \\ \text{كل ا هي ح} \\ \hline \text{بعض ح هي ب} \end{array}$$

يمكن صياغة هذا الضرب وفقا لنظرية حساب المحمول على النحو التالي

$$\begin{aligned} & (\exists x) [f x \cdot g \\ & (x) [f x \supset h x] \\ & (\exists x) [h x \cdot g x] \end{aligned}$$

$$[(\exists x) (f x \cdot g x) \cdot (x) (f x \supset h x)] \supset (\exists x) (h x \cdot g x)$$

ويمكن وضع هذا الضرب القياس في الصورة التالية من وجهة نظر حساب القضايا

$$[(p \cdot q) \cdot (p \supset R)] \supset (R \cdot q)$$

وتوضع الصيغة التحليلية لهذا الضرب في القائمة الآتية

$[(p \cdot q) \cdot (p \supset R)] \supset (R \cdot q)$	$(p \cdot q)$	$(p \supset R)$	$(R \cdot q)$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

بتوضيح لنا من الصيغة التحفلة هذا الضرب أن كل القسيم تحت ثابت النضر
الرئيس هي قيم صدق ومنه فإن الضرب صحيح ومتبع.

٣ — الضرب الثالث من الشكل الثالث Darapti

ومثال هذا الضرب

كل الجنود شجعان A كل ا هي ب ك.م

كل الجنود متصرون A كل ا هي ح ك.م

بعض المتصرون شجعان ا بعض ح هي ب ح م

صورة هذا الضرب وفقا لنظرية حساب المحمول هي

$$[(x) (fx \supset gx) \quad (x) (fx \supset hx) \quad \supset \quad \exists x (hx \cdot gx)]$$

هذه الصورة تصبح وفقا لنظرية حساب القضايا على النحو التالي

$$[(p \supset q) \quad (p \supset R) \quad \supset \quad R \cdot q]$$

الصيغة التحليلية لهذا الضرب توضحها القائمة التالية .

$(p$	\supset	$q)$	p	\supset	R	\supset	$(R$	$q)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F
T	F	F	F	T	T	T	T	F
T	F	F	F	T	F	F	T	F
F	T	T	T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F	F	F
F	T	F	T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	F	F

ومن قائمة الصلح السابقة يتضح لنا أن هناك ثلاث قيم كذب تحت ثابت التضمن الرئيس ومن ثم فإن هذا الضرب فاسد وغير منتج، وهذا الضرب هو الذى قاد المناطقه الرياضيين إلى القيام بمحاولة إعادته صياغة نظرية القياس الأرسطية .

٤ - الضرب الرابع - الشكل الثالث Felapton

ومثال هذا الضرب

لا	أ	هـ	ب	E
كل	أ	هـ	ح	A
<hr/>				
∴ ليس بعض ح	هـ	ب	○	

الصياغة الرمزية لهذا القياس تكون على النحو التالى

$$[(x) (f x) \sim g x) \cdot (x) (f x \supset b \therefore)] \\ \supset (\exists x) (b x \cdot \sim g x)$$

وتكون هذه الصيغة وفقا لنظرية حساب القضايا هـ

$$[(p \supset \sim q) \cdot (p \supset R)] \supset (R \cdot \sim q)$$

والصيغة التحليله لهذا الضرب يمكن وضعها فى القائمة التالية لتعرف ما إذا كان الضرب القياس منتجاً أم فاسداً .

$(P$	\supset	$\sim q$	\cdot	$(P$	\supset	$R)$	\supset	$(R$	\cdot	$\sim q$
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T		F	F	T	F	F	T	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
F	T	F	T	F	T	T	F	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F	F	F	F	T

يتضح لنا من الصيغة التحليلية للضرب الرابع من الشكل الثالث أن هناك ثلاث قيم كذب تحت ثابت التضامن الرئيس ومن ثم فإن هذا الضرب فاسد وغير مشجع أي أنه غير صحيح .

٥ — الضرب الخامس من الشكل الثالث Bocardo

ومثال هذا الضرب

O	ليس بعض ا هي ب
A	كل ا هي ب
<hr/>	
O	ليس بعض ب هي ب

يمكن وضع هذا الضرب في الصورة التالية وفقاً لنظرية حسابات المحمول

$$[(\exists x) (x \cdot \sim g x) \cdot (x) : f x \supset h x)] \supset (\exists x) (h x \cdot \sim g x)$$

وتكون هذه الصيغة وفقاً لنظرية حساب القضايا على النحو التالي

$$[(p \cdot \sim q) \cdot (p \supset R)] \supset (R \cdot \sim q)$$

والصيغة التحليلية لهذا الضرب تتخذ القيم التالية

$[(p$	\cdot	$\sim q)$	\cdot	$(p$	\supset	$R)]$	\supset	$R)$	\cdot	$\sim q)$
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F	T	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F
F	F	F	F	F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T	F	T	F	F	T

يلامظ انه في حالة الضرب Bocardo تكون كل القسم تحت ثابت الضمن

الرئيسي هي في حد ذاتها قيم صدق ومن ثم فان هذا الضرب صحيح ومتبع .

٢ — الضرب السادس من الشكل الثالث Ferison

مثال هذا الضرب

$$\begin{array}{rcl} E & \text{لا} & \text{أ} \text{ هي ب} \\ | & \text{بعض} & \text{أ} \text{ هي ح} \\ \hline O & \text{ليس بعض} & \text{ح} \text{ هي ب} \end{array}$$

وهذا الضرب وفقا لنظرية حساب المحمول يأخذ الصورة التالية

$$[(f x \supset \sim g x) \cdot (\exists x) (f x \cdot h x)] \supset (\exists x) (h x \cdot \sim g x)$$

وصيغة من وفقا لنظرية حساب القضايا تكون صورتها

$$[(p \supset \sim q) \cdot (p \cdot R)] \supset (R \cdot \sim q)$$

والصيغة التحليلية لهذا الضرب ممكن وضعها في القائمة التالية :

$[(P \supset \sim q) \cdot (P \cdot R)]$	\supset	$(R \cdot \sim q)$
T	F	F
F	F	F
T	T	T
T	T	F
F	T	F
F	T	F
F	T	T
F	T	T

يلاحظ من الصيغة التحليلية لهذا الضرب أن جميع القيم تحت ثابت التضمن

الرئيس هي قيم صدق ومن ثم فإن الضرب القياس السادس من الشكل الثالث متبع .

أربعا : الشكل الرابع من أشكال القياس

كان ثيوفراستس أول من أشار إليه ثم وضعة جالينوس في صورته المبروقة، وفيه يكون الحد الأوسط محمولا في الكبرى وموضوعا في الصغرى، ويفضل البعض تسمية هذا الشكل « بالشكل الجاليني » ، Galenian Figure . وعلى حد قول كينز Keynes فإن هذا الشكل لم يظهر في كتابات المنطق قبل بداية القرن الثامن عشر . وقد ذهب المنطقة إلى أن هناك خمسة ضروب متبعة في هذا الشكل ، وهذه الضروب هي :

Baralipon — Celantes — Dabitis — Fap-smo — Frisesomorum

والصورة الرمزية العامة لهذا الشكل هي

وضع الحد الأوسط



ب	هي	أ
ا	هي	ح
. . . ح هي أ		

ويمكننا القيام بمحاولة صياغة الضروب الخمسة ، التي اعتبرت مشبعة ، في الشكل الرابع ؛ من وجهة نظر المناطق المحدثين وفقا لنظرية حساب المحمول . حتى نرى ما إذا كانت هذه الضروب منتجة حقا أم لا .

١ - الضرب الأول من الشكل الرابع Baralipton

مثال هذا الضرب

$$\begin{array}{rcl} \text{كل ف هي ا ك م} & & A \\ \text{كل ا هي ح ك م} & & A \\ \hline \text{بعض ح هي ب ج م} & & I \end{array}$$

صياغة هذا الضرب القياسي وفقا لنظرية حساب المحمول هي

$$\begin{aligned} [(x) (f x \supset g x) \cdot (x) (g x \supset h x)] \\ \supset (\exists x) (h x \cdot f x) \end{aligned}$$

وهذه الصياغة من وجهة نظر حساب القضايا تصبح

$$[(p \supset q) \cdot (q \supset R)] \supset (R \cdot p)$$

ويمكن وضع هذه الصيغة في قائمة الصديق التالية

	D		.	(q	D	R)[D	(R	.	p)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	F	T	T		T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	F	F	F	F

يتضح لنا من قائمة صدق هذا الضرب القياسي أن القيم تحت ثابت التضمن الرئيس في العودرة ٨، تحوى ثلاث قيم كذب . ومن ثم فإن هذا الضرب القياسي فاسد وغير متج .

٢ - الضرب الثاني من الشكل الرابع Celantes

مثال هذا الضرب

E	لا واحد من ب هي ا
A	كل ا هي ح
<hr/>	
E	لا واحد من ح هي ب

صياغة هذا الضرب وفقا لنظرية حساب المحمول هي :

$$[(x) (fx \supset \sim gx) \cdot (x) (gx \supset hx)] \supset (x) (hx \supset fx)$$

وهذه الصيغة وفقا لنظرية حساب القضايا هي

$$[(p \supset \sim q) \cdot (q \supset R)] \supset (R \supset p)$$

ويمكن لنا معرفة قيم الصدق والكذب لهذه الصيغة عن طريق الالتجاء لقائمة الصدق حتى يمكننا أن نعرف صحة هذا الضرب القياسي من عدمه .

$(p$	\supset	$\sim p)$	\cdot	$(q$	\supset	$R)$	\supset	$(R$	\supset	$p)$
T	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T	F	T	T
T	T	T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	F	T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	T	F	T	T	F	T	F	F
F	T	T	T	F	T	F	T	F	T	F

يلاحظ من الصيغة التحليلية للضرب القياسي Celantes كما هو موضح في قائمة الصدق أن هذا الضرب فاسد وغير منتج لأن قائمة صدق هذا الضرب تحتوي على قيم كذب .

٤ — الضرب الثالث من الشكل الرابع *Dabitis*

ومثال هذا الضرب القياسى

$$\begin{array}{rcl} A & \text{كل } x \text{ هي } a & \\ F & \text{بعض } x \text{ هي } c & \\ \hline I & \therefore \text{بعض } c \text{ هي } a & \end{array}$$

صياغة هذا الضرب القياسى وفقا لنظرية حساب المحمول ~~تكون~~ على النحو التالى :

$$[(x)(fx \supset gx) \cdot (\exists x)(gx \cdot hx)] \supset (\exists x)(hx \cdot fx)$$

هذه الصيغة من وجهة نظر حساب القضايا نأخذ الشكل الآتى :

$$[(p \supset q) \cdot (q \cdot R)] \supset (R \cdot p)$$

يمكن لنا أن نستنتج فساد هذا الضرب من صحة ، إذا ما قننا بوضع هذه الصيغة فى قائمة صدق ونجرى عليها قوانين المنطق الرمضى حتى نعرف قيم الصدق الخاصة بهذا الضرب القياسى .

$(p$	\supset	$q)$	\cdot	$(q$	\cdot	$R))$	\supset	$(R$	\cdot	$p)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
T	F		F	F	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	T	F	F	T
	T	T	T	T	T	T	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T	F	F	F
	T	F	F	F	F	T	T	T	F	F
F	T	F	F	F	F	F	T	F	F	F

يتضح لنا من الصيغة التحليلية لهذا الضرب أن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيس هي قيم صدق Truth-values ، فيما عدا قيمة واحدة ، ومن ثم فإن الضرب الثاني Datisi من الشكل الرابع فاسد وغير منتج

٢ — الضرب الرابع من الشكل الرابع Fapesmo

الصورة التالية توضح لنا صياغة هذا الضرب

$$\begin{array}{r} \text{كل } A \text{ هي } B \\ \text{كل } B \text{ ليست } C \\ \hline \therefore \text{ليس بعض } C \text{ هي } A \end{array}$$

صياغة هذا الضرب من وجهة نظر نظرية حساب المحمول تأخذ الصورة التالية :

$$[x(fx \supset gx) \cdot (x)(gx \supset \sim hx)] \supset (\exists x)(hx \cdot \sim fx)$$

وإذا ما وضعنا هذه الصيغة وفق نظرية حساب القضايا تكون صورتها .

$$[(p \supset q) \cdot (q \supset \sim R)] \supset (R \cdot \sim p)$$

ويمكننا وضع هذه الصيغة للضرب الرابع من الشكل الرابع في قائمة الصدق التالية حتى نعرف ما إذا كان هذا الضرب القياسى منتج أم لا .

$(P$	\supset	$q)$	\cdot	$(q$	\supset	$\sim R)$	\supset	$(R$	\cdot	$\sim P)$
T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	T	F	T		F	F
T	F	F	F	F	T	T	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	F	F	F	T
F	T	F	T	F	T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	F	F	F	T

يتضح لنا من هذه القائمة أن هناك قيم كذب تحت ثابت التضمن الرئيسي في
العمود رقم (٨) ومن ثم فإن هذا الضرب القياسي فاسد وغير منتج .

٥ — الضرب الخامس من الشكل الرابع Friesomorum

مثال هذا الضرب

I	بعض ا هي ب
E	كل ب ليست ح
<hr/>	
O	ليس بعض ح هي ا

صيغة هذا الضرب من وجهة نظر ، نظرية حساب المحمول تكون على النحو التالي :

$$[(\exists x) (fx \cdot gx) \cdot (x) (gx \supset \sim hx)] = (\exists x) (hx \cdot \sim fx)$$

وهذه الصيغة وفقا لنظرية حساب القضايا تأخذ الصورة التالية :

$$[(p \cdot q) \cdot (q \supset \sim R)] \supset (R \cdot \sim p)$$

ويمكن لنا معرفة ما إذا كان هذا الضرب متجا أم فاسدا عن طريق
الالتجاء لقائمه الصدق .

$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow \sim R)$	$(R \rightarrow \sim p)$
T	F	F
T	T	F
T	F	F
T	T	F
F	F	T
F	T	F
F	F	T
F	T	T

يتضح لنا من الصيغة التحليلية للضرب الخامس من الشكل الرابع أن هناك قيمة كذب واحدة تحت ثابت التضمن الرئيس في العمود رقم (٨) ومن ثم فإن الضرب القياسي الخامس من الشكل الرابع فاسد وغير منبج .

يتضح لنا من استعراضنا للصيغ التحليلية للضروب المختلفة في الأشكال الأربعة للقياس ما يلي :

أولا : أنه ثبت بالتحليل أن الضروب الأربعة التي حدد أرسطو إنتاجها في الشكل الأول إنما هي ضروب صادقة ومنتجة من وجهة نظر المنطق الرياضي أيضا ، ذلك أن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيسى في العمود رقم (٨) إنما هي قيم صدق ، كما وقد اتضح أيضا صدق ضروب الشكل الثاني فيما عدا الضرب الأول .

ثانيا : أن الصيغ التحليلية للضروب الشكل الثالث تكشف لنا فساد الضربين الثالث والرابع من ضروب هذا الشكل ومن ثم فهي غير منتجة من وجهة نظر المنطق الرياضي .

ثالثا : كما وقد تبين لنا فساد جميع ضروب الشكل الرابع — والتي اعتبرها التقليديون منتجة — الذي أضيف إلى أشكال القياس الثلاثة الأساسية ، التي وضعها أرسطو ، في عصر متأخر عن العصر الأرسطي ، وهنا نقاسم : هل اكتشف أرسطو أن ضروب هذا الشكل إنما هي ضروب فاسدة لأنها تنطوي على أغاليط تخيل بشروط التضمن ؟ أم أنه لم يتوصل إلى معرفة هذا الشكل من أشكال القياس ؟

إننا بطبيعة الحال نرجح الأمر الأول ذلك لأن أرسطو قد عرف التضمن — كما أشرنا إلى ذلك من قبل — فضلا عن أنه ليس من البساطة بمكان أن نثبت عدم معرفته بالشكل الرابع أساسا ، وهو الذي وضع لنا علم المنطق وحدده تحديدا تاما من خلال القواعد والشروط الأساسية لكل تهوراته .

الفصل الثالث

نظرية حساب الفصول

الخصل الثالث

نظرية حساب الفصول

دراسة الفصول Classes ، من دراسات المنطق الرياضى المعاصر ذات الأهمية المركزية ، رغم أن بعض المناطق الرياضيين لم يقدموا لنا دراسة نظرية الفصول على أنها من النظريات ذات الفائدة المباشرة . زعمنا بأن دراسة الفصول ، فى حد ذاتها ، تخدم الفلسفة أكثر من المنطق أو الرياضيات . لكن أصحاب الاتجاه الرياضى يركزون بصفة مباشرة على أهمية هذه النظرية ، بل نجد أعمالهم تتناول المواضيع الأساسية فى النظرية خاصة فى الرياضيات العليا .

وقد إتضح المعاصرين من المناطق والرياضيين ، أن نظرية الفصول تفهى ، بلا ريب ، إلى نتيج علمية تطبيقية من أهم جاب من جوانب البحث العلمى ، خاصة فى علم الفيزياء physics ، وعلى وجه التحديد فى نظرية الاحتمالات (1) Theory of Probability

ويهمنا أن نؤكد - قبل أن نتناول بالبحث النظرية التى بين أيدينا - أن البحث فى مسألة الفصول يرتد بصفة مباشرة إلى عقلية أرسطو ، صاحب المنطق وواضحة الأول . لأن نظرية الفصول ترتبط ارتباطاً وثيقاً بمبحث التصورات Concepts من ناحية ، وبالمفهوم Intension والثاني من الناحية الأخرى ، ونظرية الأحكام Judgments من الناحية الثالثة ، وما يرتبط بهذه الأبحاث جميعاً

(1) (a) Iass, H Gottlieb, p . probability and Statistics , ch.1, ch.2, london 1970

(b) Feller ,w., An Intoductia to Probability Theory and its Applications . 3rd ed, london, 1968

(c) KAYe, D., Boolean Systems , london, 1670

من نواحي تطبيقية سواء في الاستدلالات المباشرة Mediate Inference أو الاستدلالات غير المباشرة Immediate Inference ، هذا إلى جانب إرتباطها الوثيق بمبحث الوجود Ontology

الا أنه ينبغي أن نوضح ، بادىء ذى بدء ، أننا لن نتناول في هذا الموضع بحث ما لنظرية الفصول من أهميه بالنسبة لمبحث الوجود ، من الناحية الفلسفية ، بل سنركز على دراسته الجوانب المنطقية والرياضية للنظرية ، ذلك لأن أهمية نظرية الفصول تكمن في ثلاث جوانب هامة هي :-

الجانب الأول : منطقي ، يتصل أوثق الإتصال بالاتجاهات الأساسية المنطقية الصوري الارسطي .

الجانب الثاني : رياضي ، يدعم أبحاث المنطقة والرياضيين مما في الجزء الخاص بالمنطق الرياضي .

الجانب الثالث : تطبيقي ، يتصل إتصالا مباشرا بإمكانية استخدام العلاقات الأساسية للفصول في نظرية حساب الاحتمالات . وهو موضوع إهتمام الرياضيين والدارسين للفيزياء الحديثة .

وعلى هذا فإننا سنتناول في دراستنا هذه الجانب المتصل بالمنطق الرياضي فقط لأن الجوانب الأخرى تتصل بموضوعات خارجة عن مجال هذه الدراسة .

الحقيقة التي يكاد يجمع عليها المنطقة الدارسون للمنطق الصوري الارسطي تبدى لنا من يقوّن بأن أبحاث أرسطو في المنطق صدرت عن عقلية صورية تجريديّة بحتة ، لكن جوهر الأمر يتمثل في أن أرسطو لم يقدم لنا مباحث المنطق في ثوبها الصوري فحسب ، بل عمد من باب حلفي الى ربط المنطق بالمتافيزيقا

في أقوى صورها من ناحية ، كما تفصح عنها التحليلات الأرسطية في دما بعد الطبيعة؛ كما وقد ربط دراسته للمنطق بالفيزياء كعلم يدرس الواقع التجريبي من الناحية الأخرى ، وربما كشفت لنا أبحاث المعاصرين من كبار الرياضيين والفيزيائيين عن أهمية أرسطو في هذه الناحية .

وتأسيسا على هذا ، فإنه على الرغم من أننا لا نجسد من بين مباحث المنطق الصوري الأرسطي مبحثا مستقلا لنظرية الفصول وأهميتها ، إلا أننا نجد أرسطو يظف نظرية المنطق بأسرها من خلال إدراكه التام لحقيقة الدور الذي يؤديه تصور الفصل في المنطق ، وهذا ما جعله يميز بدقة بين الحدود Terms والتصورات والمفهوم والمصدق والأحكام والقضايا .

وإذا كان المعاصرون من المناطق لم يتبينوا أهمية أرسطو في هذه النقطة ، فإن هذا يرجع في الحل الأول إلى فشل أرسطو في إدراك التمييز بين كل من القضية المحلية ، والقضية العامة من حيث اعتبار الصورة الأخير للقضية من صور القضايا المحلية ، فضلا عن إخفاقه في التمييز بين القضية ودالة القضية Propositional function والتمييز بين الفعل وفصل التصور ، وتصور الفصل ، وفصول الفصول Classes of Classes ، وما إلى ذلك من التميزات الدقيقة ، التي عرفت ولأول مرة بصورة واضحة من ثنايا أعمال رسل في فجر هذا القرن ، وأصبحت من التميزات الجوهرية لأصحاب المنطق للرياض .

والآن؛ إذ كان رسل قد تمكن من تدعيم الإنجاء المنطقي الخاص بنظرية الفصول في جوانبها التحليلية والتركيبية الرياضية، فهل تمكن من دفع المنطق الرياضي خطوات إلى الامام ، أم أن نظرية لم تفي بالجانب التحليلي للنظرية ذاتها ؟

تناول رسل دراسة نظرية الفصول في أكثر من موضع من كتاباته من أهمها:
(١) «أصول الرياضيات»، (١٩٠٣) حيث نجد في الفصل السادس من الجزء الأول يتناول دراسة الفصول وأهميتها بالنسبة للمنطق الرياضي، وذلك بعد أن عرض لنا في الفصل الثاني كيفية إجراء الحساب التحليلي للفصول في المنطق الرياضي وفق آراء بيانو.

(٢) «المنطق الرياضي»، (١٩٠٨) وهي مقالة صدرت قبل نشر مبادئ الرياضيات، حيث يعالج فيها نظريتي الفصول والعلاقات في القسم السابع بما يلحقه الضوء على الأفكار التي وردت في المبادئ.

(٣) «مبادئ الرياضيات»، (١٩١٠-١٩١٣) - بالاشتراك مع هوايتيد - ونجده يعرض لنا النظرية العامة للفصول، وحساب الفصول، ووجود الفصول، والفصل الكلي، والفصل الصفري، في القسم الثالث من الجزء الأول.

(٤) «فلسفة الذرية المنطقية»، (١٩١٨-١٩١٩) وهي مجموعة محاضرات ضمنها رسل أفكاره الممهورية في ثمانين محاضرات، تناول في المحاضرة السابعة منها معالجة نظرية الفصول وهو يصدد معالجة مباحث الرمزية ونظرية الانعاط.
(٥) «مقدمة لفلسفة الرياضيات»، (١٩١٩) وفيه عرض لمسألة الفصول في أكثر من موضع، إلا أنه يركز على دراسة النظرية ذاتها في الفصل السابع عشر موضحاً علاقة النظرية بأبحاث الرمزية في المنطق بوجه عام.

يؤكد رسل^(١) في أصول الرياضيات، أن كوتيراه Couturat في كتابه

« منطق ليبنز ، La Logique de Leibniz » ينزع إلى مشايعة الاتجاه الما صدقي في المنطق الرياضي ، على أساس أنه المنطق الرياضي لا يمكن تأسيسه إلا على أساس وجهه النظرية الما صدقيه ، ومن ثم فإن دكتور له يخالف إتجاه الفلاسفة الذين يشايعون وجه النظر المفهوميه . إلا أن رسل في تصوره لتأسيس المنطق الرياضي ، وعلى وجه التحديد في مسألة الفصول ، لا يعضد وجه النظر المفهوميه أو الما صدقيه ، بل يؤكد لنا أن المنطق الرياضي يقوم في مواضع وسطى بين المفهوم البحت . والما صدق البحت .

وقد حاول رسل تبير موقفه هذا في الأصول مينا الصعوبات التي تكتف تنى وجهه نظر المفهوم فقط أو الما صدق دون المفهوم . ذلك لأن الفصل يتألف من حدود ، كما ويكون مينا حين تكون لدينا الحدود التي يتألف منها ومن ثم فانه لا يمكننا إقامة تعريف للفصل باستخدام الطريقة المفهوميه على أنه فصل من المجموعات المتعلقة بالحدود التي لدينا فقط ، أما إذا حاولنا تعريف الفصل بالطريقة الما صدقيه ، فإننا سنعرفه بتعداد حدوده (٢) وبالتالي لن تتمكن من البحث في مسألة الفصول اللامتناهيه infinite Classes ومع هذا فانه نجد رسل ، وبعد مناقشة طويلة لوجهات النظر المختلفة ، يأخذ بوجهه النظر الما صدقيه في مسألة البحث في نظرية الفصول ، مؤكدا أنه لا بد من تفسير الفصل بالما صدق (٣) .

أما في مناقشة لتعريف الفصل في مقدمة لنسفة الرياضة (٤) فنجد انه يذهب الى أن هناك طريقتان لتعريف الفصل هما :

(٢) تولت مجموعة الحدود الداخلة في الفصل ما يسمى بالمجموع aggregate أو الفقه Set ومن هذه الناحية فان الفقه متميزه تماما عن الفصل Class .

(3) Russell, B., op . cit , 79

(4) Russl. B., Introduction to Mathematical philosophy. Ch. 2

(١) الطريقة الما صدقية ، التي نذكر بموجبها أعضاء الفصل .

(٢) الطريقة المفهومية ، التي نذكر بمقتضاها خاصية معرفه .

مؤكداً ان التعريف بالما صلتق يمكن أن يرد الى التعريف بالمفهوم ، على حين أن التعريف بالمفهوم لا يرد الى التعريف بالما صدق .

الرموز الأساسية المستخدمة في نظرية الفصول وحسابها (١)

(١) يرمز لأعضاء الفصل بالرموز Z, y, X

(٢) يرمز للفصول بالرموز اليونانية (٢) θ, χ, ψ, ϕ

(٣) يرمز لعضوية الفرد في فصل بالرمز ϵ ، ويقرأ epsilon ، فاذا قلنا

$\alpha \epsilon^* \epsilon$ ، فإن هذه الصيغة تعنى أن

„ x is a member of the Class a „

(٤) يرمز للضرب المنطقى logical Product بالرمز \cap ويقرأ

„ intersection „ فاذا قلنا $a \cap B$ ، فإن هذه الصيغة تقرأ على النحو التالى

„ a intersection B „

(٥) يرمز للجمع المنطقى logical Sum بالرمز \cup يقرأ 'union'

فالصيغة ، $a \cup B$ ' تعنى ، $a \cup B$.

(٦) يرمز للنفي Negation بالرمز $-$ ، فقولنا $-a$ ' يعنى ' not-a

(٧) يرمز الى الإحتواء inclusion بالرمز \subset فالصيغة ، $A \subset B$

تعنى ' A is included in B '

1 Russell .B., & whitehead, A.N., Principia Mathematica . v. 1. pp. 187-190, pp. 205-207, pp. 219-217

(٢) هذه الرموز رياضية ؛ وتقرأ على النحو التالى ϕ (phi) ، ψ (psi)

θ (thèta) ، χ (Chi) ، ψ (psi)

(٨) يرمز الفصل الكلى universal Class بالرمز V

(٩) يرمز للفصل الصغرى null - Class بالرمز A

(١٠) يرمز لوجود الفصل بالصيغة $E!a$ وتقرأ 'a exists' يعرف رسل وهو ابتداء الفصل في القضية رقم ٢٠.٣ على النحو التالي

$$CLS = \hat{a} \{ (\exists \phi) \cdot a = \hat{z} (\phi : z) \} Df$$

وفي مبادئ الرياضيات نجد قضايا الفصول تندرج في ثلاثة مجموعات رئيسية هي :-

المجموعة الاولى : وهي مجموع القضايا التي تهتم بدراسة خصائص الفصول properties of Classes وتقع هذه المجموعة من القضايا في ثلاثين قضية تبدأ من القضية رقم (٢٠.١) وتنتهي بالقضية رقم (٢٠.٤٣) .

المجموعة الثانية : وهي مجموع القضايا التي تهتم بدراسة الفصول والأوصاف Descriptions معا ، وتقع في ثمانية قضايا أساسية تبدأ بالقضية رقم (٢٠.٥) وتنتهي بالقضية رقم (٢٠.٥٩) .

المجموعة الثالثة : القضايا التي تعالج فصول الفصول ، وهي في خمسة عشر قضية تبدأ من القضية رقم (٢٠.٦) وتنتهي بالقضية رقم (٢٠.٨١)

وهناك مجموعة القضايا الداخلة في نطاق نظرية الفصول والتي تعد بمثابة تعريفات أساسية في كتاب المبادئ ، وقد أمكن لرسل وهو ابتداء حصر هذه المجموعة القضايا في إحدى عشر قضية هي :-

$$20.01 \quad F \left\{ \hat{z} (\psi z) = (\exists \phi) [\phi ! x \equiv_x \psi x] \right.$$

$$\left. f \left\{ \phi ! \hat{z} \right\} \right.$$

$$20.02 \quad x \varepsilon (\phi ! \hat{z}) = \phi ! x$$

$$20.03 \quad CLS = \hat{a} \left\{ (\exists \phi) \cdot a = \hat{z} (\phi ! z) \right\}$$

$$20.04 \quad x \ y \varepsilon a = x \varepsilon a \cdot y \varepsilon a$$

$$20.05 \quad x, y, z \varepsilon a = x, y \varepsilon a \cdot z \varepsilon a$$

$$20.06 \quad x \sim \varepsilon a = \sim (x \varepsilon a)$$

والتعريفات في القضايا 20.04 ، 20.05 ، 20.06 تستخدم على سبيل الاختصار

$$20.07 \quad (a) \cdot f a = (\phi) \cdot f \left\{ \hat{z} (\phi ! z) \right\}$$

$$20.071 \quad (\exists a) \cdot f a = (\exists \phi) \cdot f \left\{ \hat{z} (\phi ! z) \right\}$$

$$20.072 \quad [(, a) (\phi a) \cdot f (, a) (\phi a) = (\exists y)$$

$$[\phi a \equiv_a a = y] f y$$

$$20.08 \quad f \left\{ \hat{a} (\psi a) \right\} = (\exists \phi) [\psi a \equiv_a \phi ! a]$$

$$f (\phi ! \hat{a})$$

$$20.081 \quad a \varepsilon \psi ! \hat{a} \equiv \psi ! a$$

وفي نطاق المجموعه الأولى من القضايا نجد رسل ودوايهتد يقرر ان مجموعه أساسية من القضايا الخاصة ببعض خصائص النصول والتي تعتبر جوهرية بالنسبة للنظرية وهذه القضايا هي :-

$$20.15 \quad [\psi X \equiv_x X x] \equiv [\hat{z}(\psi z) = \hat{z}(X z)]$$

يقال انصلان انهما متطابقان فقط ، عندما تكون الدوال المعرفه لهما متكافئه صوريا .

$$20.31 \quad [\hat{z}(\psi z) = \hat{z}(X z)] \equiv$$

$$[x \varepsilon \hat{z}(\psi z) \equiv_x x \varepsilon \hat{z}(X z)]$$

يقال لفصلان انهما متطابقان فقط عندما يكون لكلاهما نفس عدد الاعضاء .

$$20.43 \quad (a = B) \equiv [X \varepsilon a \equiv_x X \varepsilon B]$$

وصياغة هذه القضية تعبر عن القضية السابقة في صورة معالة عن طريق

استخدام الحروف اللاتينية بدلا من :

$$\hat{z}(X z) , \hat{z}(\psi z)$$

$$20.18 \quad \left[\hat{z} (\phi z) = \hat{z} (\psi z) \right] \supset \left[f \left\{ \hat{z} (\phi z) \right\} \right. \\ \left. \equiv f \left\{ \hat{z} (\psi z) \right\} \right]$$

يقال لفصلان أنها متطابقان حينما تنتمى أو خاصة لأحدهما للفصل الآخر.

$$20.3 \quad x \varepsilon \hat{z} (\psi z) \equiv \psi z$$

ينتمى حتما إلى فصل فقط ، عندما يشبع الدالة المحددة لذلك الفصل .

تلك هي الخصائص والتعريفات الأساسية في مجال نظرية الفصول العامة .
أما نظرية حساب الفصول والتي تبدأ بالقضية رقم (٢٢) ، وتنتهى بالقضية رقم
(٢٢ر٩٥) ، فأننا نجد مجموعة أساسية من التعريفات الخاصة بالعمليات الحسابية
التحليلية للفصول وهي :

$$22.01 \quad (a \subset B) = [(x \varepsilon a) \supset (x \varepsilon B)]$$

يوضح لنا هذا التعريف أن الفصل a محتوئ في الفصل B أو أن
" all a 's are B 's "

$$22.02 \quad a \cap B = \hat{x} (x \varepsilon a \cdot x \varepsilon B)$$

يعطينا هذا التعريف حاصل الضرب المنطقي ، أو الجزء المشترك لكل من
الفصلين a ، B .

$$20.03 \quad a \cup B = \hat{x} [(x \varepsilon a) \vee (x \varepsilon B)]$$

يحدد لنا هذا التعريف حاصل الجمع المنطقي لفصلين بأنه الفصل الذى يتكون من كل الاعضاء فى كل من فى الفصلين .

$$22.04 \quad a = x \quad (x \sim \varepsilon a)$$

وهذا التعريف يحدد لنا تقى الفصل بأنه يحتوى على كل الاشياء التى ليست أعضاء فى (a) .

وهناك تعريف آخر يختص بضمه أصحاب المبادئ وتفسير عنه القضية رقم (٢٢٠٥) :

$$22.05 \quad a \cdot B = a \cap B$$

ويضيف رسل وهو ايتهد فى نطاق الحساب التحليلي للفصول بمجموعتين أساسيتين من القضايا :-

(١) مجموعة القضايا الخاصة بالقواعد الصورية

$$22.51 \quad a \cap B = B \cap a$$

$$22.57 \quad a \cup B = B \cup a$$

These embody the commutative Law

$$22.52 \quad (a \cap B) \cap \gamma = a \cap (B \cap \gamma)$$

$$22.7 \quad (a \cup B) \cup \gamma = a \cup (B \cup \gamma)$$

These embody the associative Law

$$22.5 \quad a \cap a = a$$

$$22.56 \quad a \cup a = a$$

These embody the Law of tautology

$$22.68 \quad (a \cap B) \cup (a \cap \gamma) = a \cap (B \cup \gamma)$$

$$22.69 \quad (a \cup B) \cap (a \cup \gamma) = a \cup (B \cap \gamma)$$

These embody the distributive law

$$22.8 \quad -(-a) = a$$

This is the principle of double negation

$$22.81 \quad a \subset B \equiv -B \subset -a$$

This is the principle of transposition

(٢) مجموعة القضايا الخاصة بأشكال القياس

$$22.44 \quad (a \subset B) \cdot (B \subset \gamma) \supset (a \subset \gamma)$$

$$22.441 \quad (a \subset B) \cdot (x \varepsilon a) \supset (x \varepsilon B)$$

هاتان القضيتان تعبران عن القياس الأرسطى من الضرب Barbara من

الشكل الأول

$$22.62 \quad a \subset B \equiv a \cup B = B$$

$$22.621 \quad a \subset B \equiv a \cap B = a$$

وهاتين الصورتين تعبران عن علاقة الإحتواء في صورته معادلة

$$22.91 \quad a \cup B = a \cup (B - a)$$

أى أن أيا a أو B متطابق مع a أو جزء من B مستبعد من a

ويمكن لنا أن نقدم نماذج للبراهين الرياضية على بعض القضايا الخاصة بحساب
الفضول لنوضح إلى أى مدى أمكن لأصحاب ومبادئ الرياضيات، الاستفادة من
الإفكار والتعريفات الأرسطية التي توصل إليها الجاهل التحليل لحساب نفسه.

المطلوب البرهنة على أن

$$[(a \subset B) \cdot (B \subset a)] \equiv [(X : a) \equiv_x (X : B)]$$

وهو ما تنص عليه القضية رقم (٢٢ر٤)

البرهان

من القضية رقم (٢٢ر١) والتي تنص على أن

$$a \subset B \equiv [(X : a) \supset_x (X : B)]$$

$$\therefore a \subset B \equiv [(X : a) \supset_x (X : B)] \cdot (B \subset a)$$

$$\equiv [(X : a) \supset_x (X : a)]$$

ومن القضية رقم (٤ر٣٨) والتي تنص على أن

$$(P \equiv r) \supset [(P \vee r) \equiv (q \vee r)]$$

$$\therefore [(a \subset B) \cdot (B \subset a)] \equiv [(X : a) \supset_x (X : B)]$$

$$[(X : B) \supset_x (X : a)] = [(X : a) \equiv_x (X : B)]$$

هـ. ط. ث

المطلوب البرهنة على أن

$$(a \subset B) \cdot (a \subset \gamma) \equiv a \subset B \cap \gamma$$

وهذه هي صورة القضية رقم (٢٢ر٤٥) في حساب الفصول

البرهان

من القضية رقم (٢٢١) والتي تنص على أن

$$a \subset B \equiv [(X \varepsilon a) \supset_x (X \varepsilon B)]$$

$$\therefore [(a \subset B) \cdot (a \subset \gamma)] \equiv [(X \varepsilon a) \supset_x (X \varepsilon B)]$$

$$[(X \varepsilon a) \supset_x (X \varepsilon \gamma)] \quad (١)$$

ومن القضية رقم (١٠٠٢٩) والتي تنص على أن

$$\begin{aligned} & [(X) . \phi X \supset \psi X] [(X) . \phi X \supset X x] \\ & \equiv (X) [\phi X \supset \psi X , X x] \end{aligned}$$

∴ بأخذ $(x \varepsilon a)$ عامل مشترك من الطرف الايمن في رقم (١) كم تنص على ذلك القضية رقم (١٠٠٢٩) وهي قضية مبرهن عليها في جهاز المبادئ،
ينتج أن :-

$$(a \subset B) \cdot (a \subset \gamma) \equiv (X \varepsilon a) \supset_x [(X \varepsilon B) \cdot (X \varepsilon \gamma)]$$

∴ القضية رقم ٢٢٣٣ تنص على أن

$$X \varepsilon a \cap B \equiv (X \varepsilon a) \cdot (X \varepsilon B)$$

∴ القضية رقم (١٠٠٤١٣) تنص على أن

$$\begin{aligned} \phi x \equiv_x X x \cdot \psi x \equiv_x \theta x \supset [\phi x = \psi x \\ \equiv_x X x \equiv \theta x] \end{aligned}$$

∴ من القضية رقم (٢٢٣٣) والقضية رقم (١٠٤١٣) ينتج أن

$$(a \subset B) \cdot (a \subset \gamma) \equiv [X \varepsilon a \supset_x X \varepsilon B \cap \gamma] \\ \equiv a \subset B \cap \gamma$$

هـ. ط. ث

المطلوب البرهنة على أن

$$a \cap a = a$$

وهو ما تنص عليه صورة القضية رقم (٢٢٣٥)

البرهان

القضية رقم (٢٢٣٣) تنص على أن

$$X \varepsilon a \cap B \equiv (X \varepsilon a) \cdot (X \varepsilon B)$$

$$\therefore X \varepsilon a \cap a \equiv [(X \varepsilon a) \cdot (X \varepsilon a)] \quad (١)$$

∴ القضية رقم (٤٢٤) تنص على أن

$$P \equiv P \cdot P \quad (٢)$$

∴ بتطبيق صورة القضية رقم (٤٢٤) على الناتج لدينا في رقم (١) ،

ينتج أن

$$X \varepsilon a \cap a \equiv X \varepsilon a \quad (٣)$$

من (٣) ، القضية رقم (١٠٤١١) التي تقرر أن ما هو صادق بالنسبة لكل صادق أيضا بالنسبة للجزء ، ومن القضية رقم (٢٠٤٣) والتي تقرر أن

$$[a \equiv B] \equiv [(X \varepsilon a) \equiv_X (X \varepsilon B)]$$

يتج أن

$$a \cap a = a$$

هـ. ط. ث

تلك هي بعض صور القضايا في الحساب التحليلي للهـ ول توضيح لنا كيفية البرهنة بطريقة رياضية على دقة التصورات المنطقية التي سبق افتراضها من خلال الجهاز الرياضى لنظرية حساب النصول .

ولكننا نجد رسل وهو ايتهد يخصصان القضية رقم (٢٤) بفروعها للبرهنة على الفصل الكلى ، والفصل الصفري ، ووجود النصول . ومن ثم نجدهم يضعون بعض القضايا الاساسية من خصائص كل من هـ هذه التصورات على حدة في ساسلة من القضايا التي اعتبر بعضها بمثابة تعريفات .

التعريفات الاساسية :-

(١) يعرف الفصل الكلى في القضية رقم (٢٤ر٠١) بالصيغة

$$V = \hat{x} (X \equiv X)$$

(٢) يعرف الفصل الصفري في القضية رقم (٢٤ر٠٢) بالصيغة

$$\Lambda = -V$$

(٣) يعرف وجود الفصل في القضية رقم (٢٤ر٠٣) بالصيغة

$$\exists i a \equiv (\exists a) . X \varepsilon a$$

قضايا عن خصائص الفصل الكلى والصفرى

(١) القضية رقم (٢٤١٠٢) والتي تنص على أن

$$(X) . \phi X \equiv \frac{1}{2} (\phi Z) = V$$

وكذلك القضية رقم (٢٤١٠٣) والتي تنص على أن

$$(X) . \sim \phi X \equiv \frac{1}{2} (\phi Z) = \Lambda$$

ما تان القضيتان توضحان معا أن أى دالة صادقة دائما تحدد الفصل الكلى ،
كما وأن أى دالة تكون كاذبة دائما تحدد الفصل الصفرى .

(٢) قضايا توضح صورتى قانونى التناقض والثالث المرفوع وتوضحها

صورتى القضية رقم (٢٤٢١) ، القضية رقم (٢٤٢٢) 

$$24.21 \quad a \cap -a = \Lambda$$

$$24.22 \quad a \cup -a = V$$

(٣) قضايا تشير إلى خصائص الفصل الكلى والفصل الصفرى بالإشارة

إلى عمليتي الإضافة addition والضرب multiplication وهذه القضايا توضحها

الصورتين الآتيتين :-

$$24.23 \quad a \cap \Lambda = \Lambda$$

$$24.24 \quad a \cup \Lambda = a$$

$$24.26 \quad a \cap V = a$$

$$24.27 \quad a \cup V = V$$

(٤) قضايا عن خصائص التكافؤ ، ويمكن تصنيفها في ثلاث قضايا أساسية هي :-

$$24.3 \quad a \subset B \equiv a - B = \Lambda$$

أى أن a محتوية Contained في B تكافئ قولنا دلائىء هو a ولكنه ليس B ،

$$24.311 \quad a \subset -B \equiv a \cap B = \Lambda$$

وهذه الصيغة توضح لنا أن دلائىء هو a هي B ، مكافئة لقولنا دلائىء هو كل a ، B ،

$$24.58 \quad \sim (a \subset B) \equiv \exists ! a - B$$

أى أن دلائىء كل ما هو a هو B ، يكافئ قولنا دلائىء هو a وهي ليست B ، ولا تختلف طريقة البرهنة على هذه المجموعة من القضايا بصورة كبيرة عن طارق البرهنة السابقة المستخدمة في خصائص الفصول ويمكن لنا أن تبين كيفية البرهنة على معظم القضايا الخاصة بالفصل الكلى والفصل الصفري ووجود الفصول من النماذج البركانية . لآتية :-

المطلوب البرهنة على صورة القضية رقم (٢٤ر١١) والتي تنص على أن

$$(a) . a \subset V$$

البرهان

القضية رقم (٢٤ر١٠٤) تنص على أن

$$(X) . X \in V \quad (1)$$

شكلاً وتنص القضية رقم (١٠ر١) عن أن

$$(X) . \phi X \supset \phi y \quad (٢)$$

∴ من (١) ، (٢) مما ينتج أن

$$X \varepsilon V$$

وباستخدام مبدأ التبسيط Simplification المتخصص عليه في القضية رقم (٢٠ر٢) بأن

$$q \supset p \supset q$$

$$\therefore (X \varepsilon a) \supset (X \varepsilon V)$$

∴ القضية رقم (١٠ر١) تنص على أن ما هو صادق بالنسبة للكل

فهو صادق أيضاً بالنسبة للجزء \mathcal{R} ومن القضية رقم (٢٢ر١) والتي تنص على أن

$$(a \subset B) \equiv [(X \varepsilon a) \supset_x (X \varepsilon B)]$$

ينتج أن

$$a \subset V$$

وباستخدام القضية رقم (١٠ر١) ينتج أن

$$(a) . a \subset V$$

هـ. ط. ث

المطلوب البرهنة على أن

البرهان

القضية رقم (١٠٥ ر ١٤) تنص على أن

$$(X) . X \sim \varepsilon \Lambda \quad (1)$$

و. . القضية رقم (١٠٥ ر ١٤) تنص على أن

$$(X) . \phi X \supset \phi y \quad (2)$$

و. . من (١) و (٢) ينتج أن

$$X \sim \varepsilon \Lambda$$

و. . القضية رقم ٢٢١ تنص على أن

$$\sim p \supset p \quad q$$

و. . ينتج أن

$$(X \varepsilon \Lambda) \supset (X \varepsilon \varepsilon) \quad (3)$$

و. . من رقم (٣) ومن القضية رقم (١٠٥ ر ١٤) التي تقرر أن كل ما هو

صادق على الكل فهو صادق أيضا على الجزء و. . ومن القضية رقم (٢٢١ ر ٢٢) والتي تنص على أن

$$(a \varepsilon B) \equiv [(X \varepsilon a) \supset_x (X \varepsilon B)]$$

و. . ينتج أن

$$(a) . \Lambda \varepsilon a$$

تلك من أهم صور البراهين الأساسية التي نجدها في مبادئ الرياضيات
والتي توضح لنا إلى أي مدى أمكن البرهنة على الزمول ، والفصل الثاني ،
والفصل الصفري ، في صيغ رياضية بحيث تقوم على غرار البرهان الرياضي من
خلال القواعد الأساسية للتعريفات المستخدمة في النظرية العامة للفصول وحساب
الفصول .

الفصل الرابع

نظرية العلاقات

الفصل الرابع

نظرية العلاقات

نظرية العلاقات Theory of Relations من أهم نظريات المنطق الحديث ، لأنها تلعب دوراً بالغ الأهمية في أى جهاز منطقي رياضي ، لأنه من النظر في مسألة العلاقات تنشأ لدينا أنكاراً غاية الأهمية عن طبيعة النظرية للوجود والعالم من حولنا . وقد عرفت مسألة العلاقات بصورة دقيقة في أبحاث دي مورجان ، وتشارلز بيرس ، وشرويدر ، إلا أن تفسير العلاقات في الأبحاث السابقة على فترة رفض المذهب المثالي لم يكن جوهرياً لأسباب نوجزها فيما يلي :-

١ - أن المناطقة الدراسون لطبيعة المنطق من منظور رياضي لم يتمكنوا من التخلص من الصورة الأساسية للقضية الخيلية التي ترد إليها كل صور القضايا الأخرى ، وهذا ما كشفت عنه التحليلات المعاصرة ابتداء من رسل .

٢ - أن كثيراً من الخلط المنطقي اكتنف نظريات أصحاب المنطق نتيجة لعدم التمييز بين الفصول والعلاقات ، وبين تصور الفصل ، والفصل التصور ، والفصول كثير ، وبين أنواع متعددة من العلاقات كشفت عنها التحليلات الرياضية للمعاصرين .

٣ - أن المحاولات السابقة انتهت إلى إعمال الرياضيات في المنطق بصورة كبيرة في الوقت الذي لم يتطور فيه المنطق بقدر كاف ، ولذلك وجدنا أصحاب المنطق الرياضي المعاصر يتناولون بالتطوير أولاً الجهاز المنطقي ليسير المنطق

والرياضيات معا في خطين متوازيين ، وبحيث يصبح من الممكن رد الصور الرياضية لصور منطقية .

ومن ثم فإننا لا تكون مبالغين إذا قلنا ، أن نظرية العلاقات هي أهم جزء في النظرية المنطقية التي إنطلق منها « برتراند رسل » لتحطيم القبيـود التي إحتوت الفكر الفلسفي والمنطقي من جراء الخطأ في تصور العلاقة .

والحقيقة أن رسل تمكن بصورة واضحة من إقامة نظرية متكاملة للعلاقات في جانبها ، المنطقي والرياضي معا بعد أن توصل إلى إستكمال النسق الإستنباطي للمنطق على أسس رياضية ، بحيث أصبح مسلحاً بأدوات تحليلية ، ورموز فنية دقيقة ، تمكنه من الوقوف في مواجهة أى نزعة تحاول أن تبتلع أبحاثه بعيداً عن الرياضيات كأسلوب واضح للعلم .

ولنظرية العلاقات ثلاثة جوانب أساسية ؛ جانب منطقي ، وآخر رياضي ، وثالث فلسفي يستند إلى الصورة المنطقية التي تؤكد النظرة العلاقية . ولغرض المنطق الرياضي فإنه يتحتم علينا أن نتناول النظرية في جانبها المنطقي والرياضي فقط ، مع الإشارة العفيفة لبعض الاتجاهات ذات الطابع الفلسفي .

والواقع أنه يتعين علينا أن نلتقي بعض الضوء على الإعتبارات التي جعلت رسل يأخذ بالنظرة العلاقية ، ويعول كثيراً على مسألة العلاقات الخارجية ، External بل ويعتبر مبحث العلاقات من مباحث المنطق الهامة ، في الوقت الذي بلغت فيه نظرة برادلي للعلاقات الداخلية قمتها .

أولاً :- لمس رسل قصوراً واضحاً وضعفاً شديداً في المنطق التقليدي والمذاهب الفلسفية التي ارتبطت به مثل مذاهب ليبنتز واسبينوزا وهيغل وبرادلي ،

لأنها تستند بصورة قوية إلى أن كل قضية لها موضوع ومحمول،^(١) هذا إلى جانب مشاركة أصحاب المذاهب المطلقة، لأرسطو في رأيه القائل بأنه يمكن رد كل صور القضايا الأكثر تركيباً إلى صورة القضية الحلية، مما أدى إلى إعتبار القضية الحلية أبسط صور القضايا على الإطلاق.

ثانياً :- أن رسل حين عكف على نقد المثالية Idealism، خاصة مثالية برادلي - أقوى المدافعين عن المذهب المثالي آنذاك في إنجلترا - تبين أن برادلي أقام منطقة على أساس مذهب العلاقات الداخلية Internal Relations، وقد ترتب على الأخذ بهذا المذهب أن أصبحت كل علاقة بين حدين تعبر أولاً عن خصائص ذاتية للحدين،^(٢) والحقيقة أن بديهية العلاقات الداخلية التي أخذ بها أصحاب المذهب المثالي، هي التي جعلت من رسل مدافعاً قوياً عن مذهبه الجديد، من خلال إعتراضاته على المذهب المثالي ككل، ومن ثم وجدنا رسل يطرح ثلاثة إعتراضات أساسية على مسألة العلاقات الداخلية، كما يذهب إلى ذلك موريس فيتز Morris Weitz في مقاله بعنوان «الوحدة والتحليل في فلسفة رسل» في المؤلف الضخم الذي أخرجه لنا شليب.

الاعتراض الأول :- أن مسألة العلاقات الداخلية لا يمكن الأخذ بها في حالة العلاقات اللاشتمالية Asymmetrical Relations.

الاعتراض الثاني :- أن العلاقات الداخلية لا تزودنا بأي معنى عن طبيعة الحد nature of Term.

(1) Russell, B., Logical Atomism, p. 324, ed. in. 'Logic and Knowledge'

(2) Russell, B., My Philosophical Development, p. 61

الاعراض الثالث :- أن القضية الأساسية التي تستند إليها العلاقات الداخلية
لوالقائه بأنه « يوجد موضوع واحد فقط وبحموله ، هي بالضرورة قضية كاذبة
لأنها تتضمن تمييزاً بين المحمول والموضوع (١) .

ثالثاً :- أن رسل حين أخذ يدافع عن « فلسفة الذرية المنطقية » ، التي اتخذها
مذهب صريحاً له فيما بين الأعوام ١٨٩٩ - ١٩٠٠ ، وما يترتب على ذلك من
تبني المنطق الذري في الفلسفة ، أخذ يشارك أصحاب الفهم المشترك الشائع
Common - Sense اعتقادهم الأساسي بوجود أشياء things كثيرة ومنفصلة ،
ومن ثم فقد قهقروا عليه ، أن يقبل النتائج المترتبة على النظرة الذرية للأشياء من
حولنا حيث أصبح العالم مكوناً من وقائع ، أبسطها جميعاً الواقعة الذرية التي تشير إليها
القضية الذرية باعتبارها قضية بسيطة ، وذات صورة متميزة تماماً عن القضية
الحملية ، وبالتالي أصبحت هناك علاقات بين القضايا وبعضها ، وهذا يمكن لنا تفسير
العالم فلسفياً ومنطقياً على أساس مخالف لما ذهب إليه أصحاب المذهب المثالي في
صورته الهيجلية على وجه الخصوص .

رابعاً :- أن إشتغال رسل (٢) بفلسفة الرياضيات والمنطق الرياضي ، أفصح

(1) Weitz, M., " Analysis and unity in Russell's Philosophy" .
pp. 60 - 61

(٢) ظهرت أول مقالة فنية لرسل عن منطق العلاقات في مجلة بيانو Rivista di
Matematica بعنوان « منطق العلاقات مع بعض التطبيقات على نظرية امتسلسلات » فيما
بين عامي ١٩٠٠ - ١٩٠١ ، وقد كتبها رسل باللغة الفرنسية وترجمها إلى الإنجليزية « روبرت
تشارلز مارش » في عام ١٩٥٦ في كتاب « المنطق والمعرفة » - ثم تناول رسل بعد ذلك
بالمبحث نظرية العلاقات في بعض مؤلفاته الهامة مثل « أصول الرياضيات » (١٩٠٣) ،
و « مبادئ الرياضيات » بالاشتراك مع هوايتيد (١٩١٠ - ١٩١٣) ، « معرفتنا بالعالم
الخارجي » (١٩١٤) حيث عالج العلاقات معاً فلسفية ومنطقية ، « فلسفة الذرية المنطقية »
(١٩١٨ - ١٩١٩) في المحاضرة الثمانية ، « مقدمة لفلسفة الرياضة » (١٩١٩) .

هن وجود أنواع مختلفة من العلاقات تلعب دوراً هاماً في فلسفة الرياضيات بأسرها ، بل وتستند إليها ، ذلك لأن جزءاً كبيراً من فلسفة الرياضيات معنى يبحث العلاقات ، ولكل نوع منها استعمال مختلف عن الآخر (١).

تلك هي الإعتبارات الجرمية التي اكتسبت ، من خلالها ، نظرية العلاقات ، أهمية عظمى في نسق المنطق الرياضي المعاصر . ولكن إذا كان رسل قد ذهب إلى مذهب جديد في العلاقات ، خلافاً لما درج عليه التقليديون من المناطقة ، فما هي حقيقة مذهب رسل في العلاقات ؛ وما هي أنواعها ، وما هي أهم الخصائص التي تكتسبها العلاقات من خلال نسق المنطق الرياضي ؟ وكيف يمكن لنا أن نقوم بإجراء حساب للعلاقات وفق أفكار المنطق الرياضي ؟

إنه إذا ما نظرنا إلى حقيقة موقف رسل فيما يختص بالعلاقات ، إبتداء من مقالة عن منطق العلاقات ، حتى ظهور كتابه " مقدمة لفلسفة الرياضيات " ، لوجدنا أنه يأخذ بالنظر الماصدية في تعريف العلاقة ، وأوضح تعريف للعلاقات هو ذلك التعريف الذي نجده في " مبادئ الرياضيات " . فتعريف العلاقة من وجهة نظر الماصدق extension يتمثل في أنها فصل الأزواج couples (x, y) التي تكون الدالة $\psi(x, y)$ بالنسبة لها صادقة ، ونص رسل في هذا التعريف صريح ، حيث :

" A relation, as we shall use the word, will be understood in extension : it may be regarded as the class of Couples (x, y) for which Some given

(1) Russell, B., Introduction to Mathematical Philosophy, ch.

(١) "function $\psi (x, y)$ is true"

وكان رسل^(٢) قد ذهب في أصول الرياضيات ، إلى أن العلاقة هي ما يربط
 حدثاً بآخر ، وهذا ما جعله يربط حديثه عن العلاقات ، بمفهوه ، عن اقتضائها أنذاك ،
 لكنه عدل بعد ذلك عن هذا الموقف وتبنى صراحه وجهه النظر الماصديه بدلائل
 الاعتماد على المفهوم أساساً ، وذلك بعد ما تبين له من أن المنطق الرياضى يستند
 حقيقة إلى الماصدق أكثر من المفهوم في أكثر أجزاءه . ومن ثم فقد أخذ يميز
 صور أساسية ومتعددة عن أنواع العلاقات مما أتاح له الفرصة لإقامة حساب
 للعلاقات في مبادئ الرياضيات .

المصطلحات الأساسية للعلاقات

(١) مربع العلاقة Square of Relation

يعرف رسل مربع العلاقة بأنه ، تلك العلاقة التي تنشأ بين حدين x ، z ،
 عندما يوجد لدينا حد متوسط y ، بحيث أن العلاقة التي لدينا تقوم بين x ، y
 وبين y ، z ،^(٣) ومن أمثلة هذا النوع من العلاقات علاقة ، الجد للاب ، والتي
 ينظر إليها مربع علاقة الوالد .

(٢) ميدان العلاقة domain of Relation

(1) Russell, B, & whitehead, A. N., Principia Mathematica, vol. 1, p: 201.

(2) Russell, B., Principles of Mathematics, 94.

(3) Russell, B., Introduction to Mathematical Philosophy, p. 75.

يتكون ميدان العلاقة من كل الحدود التي لها نفس العلاقة مع شيء ما أو غيره (١).

(٣) الميدان العكس للعلاقة *Converse domain of Relation*

الميدان العكس للعلاقة يتألف من كل الحدود التي يكون لشيء ما معها نفس العلاقة (٢).

(٤) مجال العلاقة *Field of Relation*

يتألف مجال العلاقة من ميدان العلاقة وميدانها العكس معاً (٣). فإذا كانت الأبوة هي العلاقة الأساسية فإن الآباء يكونون ميدان العلاقة، أما الأبناء فيكونون ميدانها العكس، والآباء والأبناء معاً هما مجال العلاقة.

(٥) عدد العلاقة *Relation - number*

يعرف عدد علاقة ما معطاه لدينا بأنه د فصل كل العلاقات المتشابهة مع العلاقة التي لدينا (٤).

تصنيف العلاقات

يمكن لنا تصنيف العلاقات في نوعين أساسيين هما:

(١) العلاقات التماثلية *Symmetrical Relations*

(1) Ibid.

(2) Ibid.

(3) Ibid.

(4) Ibid, p. 56.

(٣) العلاقات المتعدية Transitive Relations

وبين هذين النوعين من العلاقات تتلرج أنواع فرعية أخرى من العلاقات الهامة ، وقد أقمنا هذا التصنيف ونمقا لفكرة رسل الأساسية التي أعلنها في مقدمة لفلسفة الرياضيات ، حيث يصنف العلاقات في قسمين كبيرين ، هما قسمي العلاقات التماثلية والمتعدية ، وفي إطار العلاقات التماثلية نجد ، يصنف نوعي العلاقات اللامتماثلية asymmetrical وجائزة التماثل non - Symmetrical ، وفي مجال العلاقات المتعدية يصنف نوعين آخرين من العلاقات هما العلاقات اللامتعدية Intratitive وجائزة التعدى ^(١) non - transitive .

النوع الأول : علاقات التماثل وأنواعها

(١) العلاقات التماثلية

يقال لعلامة ما أنها تماثلية ^(٢) ، إذا كانت العلاقة التي تقوم بين A ، B هي ذاتها التي تقوم بين B ، A . ومن أمثلة هذه العلاقات علاقة المساواة equality وعلاقة الأخ ، والأخت ، فإذا قلنا أن $y = x$ فإن $x = y$.

(٢) العلاقات اللامتماثلية

أما العلاقة اللامتماثلية ^(٣) ، فهي تلك العلاقة التي إذا قامت بين A ، B لا تقوم بين B ، A . ومن أمثلة هذا النوع من العلاقة ، علاقة أكبر من ، greater than وعلاقة أصغر من ، Less than ، فإذا كانت $A < B$ فإنه لا يمكن القول بأن $B > A$.

(١) Ibid, p. 57.

(٢) Ibid.

(٣) Ibid.

(٣) العلاقات جائزة التماثل

هى كل العلاقات الغير متماثلة^(١) . ومن أهمها علاقة ، الأخ ، ، وإذا كانت A أخ B فانه قد يكون B أخت A .

النوع الثانى : علاقات التعدى وأنواعها

(١) العلاقات المتعدية

العلاقة المتعدية^(٢) تكتسب هذه الخاصية ، إذا ما كانت تقوم بين A ، B ، وبين B ، C فإنها تقوم أيضا من A ، C . ومن أمثلة هذا النوع من العلاقات ، علاقة قبل Before ، وبعد after ، أكبر ، فوق . والعلاقات المتعدية هى فى أساسها علاقات لاتماثلية ، لكنه قد يحدث فى كثير من الأحيان أن تكون العلاقات المتعدية ، علاقات تماثلية ، مثل علاقة المساواة ، أو علاقته الذاتيه بالنسبه للألوان ، أو علاقة التساوى فى العدد .

(٢) العلاقات اللامتعديه

يقال لعلاقه ما أنها لا متعديه^(٣) إذا قامت علاقته ما بين A ، B ، وبين B ، C فإنها لاتقوم بين A ، C مطلقا . ومن أمثلة هذا النوع من العلاقات ، علاقته ، والد : فإنه إذا قلنا أن A والد B ، B والد C فإن هذا لا يتضمن بالضرورة أن A والد C .

(1) Ibid.

(2) Ibid.

(3) Ibid, p. 58.

(٢) العلاقات جائزة التعدي

العلاقة جائزة التعدي^(١) هي تلك التي تكتسب هذه الخاصية عندما لا تكون متعدية . ومن أمثلتها علاقة : أخ ، وكل علاقات علم التشابه . dissimilarity .

أنواع العلاقات الأساسية بين الحدود

وللعلاقات أنواع كثيرة ، ولكل نوع منها خصائص متعددة فضلا عما تكتسبه من أهمية بالنسبة للنسق الإستنباطي ككل . ومن أهم هذه العلاقات :-

(١) علاقة واحد - كثير One - Many

يعد هذا النوع من العلاقة من أهم العلاقات على الإطلاق خاصة في فلسفة الرياضيات ، فعلاقة واحد بكثير هي : العلاقة التي تكون لحد واحد مع حد معلوم ،^(٢) . ومن أمثلة هذا النوع علاقة والد - والده - علاقة الزوج - مربع كذا ... الخ . فإذا قلنا أن : حسن والد أحمد ، فإنه لا يمكن لأي فرد آخر أن يكون والد أحمد سوى حسن ، ذلك لأن علاقة : والد ، هي في جوهرها علاقة تعبير عن الرابط الذي يربط : حسن ، وأحمد ، ، على معين قد يكون : لحسن ، بإعتباره والد : أحمد ، نفس العلاقة مع اشخاص آخرين : غير أحمد ،

ومن أهم الخصائص التي تتميز بها علاقة واحد بكثير ما يلي :-

أ - أنه يمكن لنا من الناحية الصورية البعثة أن نستغنى عن كل العلاقات ونستخدم بدلا منها علاقة واحد بكثير .

(1) Ibid, p. 57.

(2) Ibid, p. 45.

ب - أن هذا النوع من العلاقة يدخل في كل العبارات التي لها الصورة وكذا
وكثنا من كيت وكيت ، " the so - and - so of such - and - such " ،
فالعلاقة زوجة سقراط ، ، تصف شخصا ما عن طريق علاقة واحد بكثير ،
مع حد معلوم لدينا ^(١) ، فالأوصاف descriptions في حقيقة أمرها أمثلة صادقة
لعلاقة واحد بكثير ، وكذلك جميع الدوال الرياضية mathematical functions .
ج - أن أهمية تحديد علاقة واحد بكثير ، تتمثل في أنه لا يمكن أن يكون
لدينا أكثر من حد واحد في طرف البداية ^(٢) .

د - أن حاصل الضرب النسبي ^(٣) relative product لهذه العلاقة مع عكسها
يتضمن بالضرورة مفهوم الذاتية لأن حاصل الضرب النسبي لعلاقين R ، S هو
العلاقة التي تقوم بين x ، z حينما يوجد حد متوسط y ، كأن تكون x /
نفس العلاقة التي بين R ، y وتكون y نفس العلاقة التي بين S ، z .

(٢) علاقة واحد - واحد One - One

يمكن اشتقاق التعريف الصوري لهذه العلاقة من تعريف علاقة واحد بكثير ،
أو بمعنى آخر هي علاقة واحد بكثير ، وكثير بواحد ، فهي تلك العلاقات التي
تتضمن حاصل ضربها النسبي ، مع عكسها ، التطابق ^(٤) . فإذا قلنا سقراط زوج
أكسنتيب ، ، فإذا إذا ما أثرتا إلى دة سقراط ، بالرفز A وإلى دأ كسنتيب ،

(1) Ibid, p. 46.

(2) زكي نجيب محمود ، المنطق الوضعي ، ج ١ ، ص ١٦٧ .

(g) Russell, B., Introduction to Mathematical Philosophy, p. 47.

(4) Ibid, p. 47.

بالرمز B ، فإنه بالنسبة للعلاقة زوج ، فإن A حد متعلق به referent على حين أن الحد B متعلق relatum . أما بالنسبة للعلاقة زوجة ، فإن الحد B يكون هو المتعلق به ، ويكون الحد A هو المتعلق ، ومن ثم فإن لكل من العلاقة وعكسها جتان متضادتان opposite senses (١) .

ولا شك أن هذه الخاصة من أدق الخصائص التي تميز علاقة واحد بواحد ، لأنها تزودنا بالترابط بين فصلين ، أى ترابط حد بآخر ، بحيث يصبح كل حد فى أى فصل من الفصلين مترابطا مع الحد الآخر فى الفصل الآخر . وفكرة الترابط فى حد ذاتها يمكن معرفتها عند لا يكون للفصلين عضو مشترك . وتتميز علاقة واحد بواحد بخاصيتين أساسيتين هما :-

(أ) الخاصية الأولى : أن حاصل الضرب النسبى للعلاقة وعكسها يتضمن التطابق ، لأن حاصل الضرب النسبى لعلاقين لا تنسحب عليه صفة التبادل . مثال ذلك أن حاصل الضرب النسبى للوالد والابن هو ، العمة ، أما حاصل الضرب النسبى للابن والوالد هو ، الوالد .

(ب) الخاصية الثانية : أن علاقة واحد بواحد تعطينا ترابطا بين فصلين ، بحيث يرتبط كل حد فى أى من الفصلين بحد آخر فى الفصل الآخر .

(٢) علاقة التشابه Similarity of Relations

تعتبر علاقة التشابه من العلاقات الهامة التى أولاها رسل صاية فائقه ، ذلك لأن التشابه يكتسب عنده من الخصائص الجوهرية فى نفس المنطق الرياضى والرياضيات معا .

والفصلان من الأشياء يقال لهما أنها متشابهان حين يكون لهما نفس عدد الحدود، أو بمعنى آخر، حين تكون علاقة واحد بواحد ميدانها أحد الفصلين، والفصل الآخر ميدانها العكس^(١).

ويقال لعلاقين P ، Q أنها متشابهتان إذا ما كانت هناك علاقة واحد بواحد بحيث تكون S ميدان P بمجال P ، وميدانها العكس بمجال Q ، وبحيث إذا كان للحد P علاقة مع حد آخر، فإن الحد المترابط مع الحد P تكون له العلاقة Q ، مع الحد المترابط الآخر، والعكس صحيح^(٢). فالعلاقان إذن تكون متشابهان إذا قامت علاقة الترابط بين حدى العلاقة.

ومن أهم الخصائص التي تتميز بها علاقة التشابه ما يلي :-

(أ) أنه إذا كانت إحدى العلاقتين تتضمن التعدد، فإن العلاقة الأخرى تكون كذلك.

(ب) أنه إذا كانت إحدى العلاقتين متعدية فإن العلاقة الأخرى تكون متعدية أيضا.

(ج) أنه إذا كانت إحدى العلاقتين تسلسليه فإن الأخرى تكنسب نفس الصفة.

(د) أن ما يطبق على إحدى العلاقتين من علاقة واحدة بكثير أو علاقة واحد بواحد ينطبق على العلاقة الأخرى.

والسؤال الآن كيف يمكن لنا أن نجتمع معا كل العلاقات المتشابهة على

علاقة معلومة ؟

(1) Ibid, pp. 52 - 53.

(2) Ibid, p. 53.

لقد أوضح رسل بصورة دقيقة أنه يمكن إقامة هذا الإجراء عن طريق عدد العنصر ، الذى هو فصل كل العلاقات ، المشابه مع العلاقة التى لدينا ، فاعداد العلاقات هى إذن كل فصول العلاقات التى تكون لكل العلاقات ، فعدد العلاقة يتمثل فى فصل العلاقات المتكون من كل العلاقات المشابهة مع عضو واحد من الفصل ، وهذه الفكرة هى ما يهم الرياضيين خاصة فى مجال لتسلسلات .

حساب العلاقات

يقوم حساب العلاقات على مجموعة من القضايا الأساسية عن العلاقات التى تعد تماما كالقضايا الابتدائية فى حساب القضايا ، ويستند هذا النوع من النظريات إلى مجموعة أساسية من الرموز والتعريفات :

أولاً :- الرموز الأساسية : Basic Symbols

تستخدم نظرية العلاقات مجموعة من الرموز الأساسية فى جانبها التحليلي ، ومن أهم هذه الرموز :-

١ - يرمز للعلاقة بالحرف اللاتيني الكبير R لتغير ظاهر apparent variable

٢ - يرمز للتغير Variable بالصيغة $(x, y) : x \hat{y} \phi$

٣ - يرمز للعلاقة الكلية Universal Relation بالرمز \forall

٤ - يرمز للعلاقة الصفرية null Relation بالرمز \bar{A}

٥ - أنه إذا ما قامت العلاقة بين زوج واحد على الأقل من الحدود فانه

يتم لها بالرمز " $\exists ! R$ " أى ، توجد R ،

٦ - يرمز لعكس العلاقة R بالرمز R^u وتقرأ " R - Converse "

٧ - يرمز للعلاقة بالرمز \overrightarrow{R} إذا كانت تشير من (x) إلى (y) ، ويرمز

لها بالرمز \overleftarrow{R} إذا كانت تشير من (y) إلى (x)

٨ - يرمز إلى ميدان العلاقة R بالرمز D^*R

٩ - يرمز لعكس الميدان بالرمز Q^*R

١٠ - يرمز إلى مجال العلاقة بالرمز C^*R

١١ - يرمز إلى حاصل الضرب النسبي لعلاقيتين R ، S بالرمز $R \vdash S$

ويعرف أصحاب المبادئ ، العلاقة في القضية رقم (٢١٠٣) على

النحو التالي :

$$Rel = \hat{R} \left\{ (\hat{x} \phi) \cdot R = \hat{x} \hat{y} \phi \vdash (x, y) \right\}$$

القضايا الأساسية عن خصائص العلاقات

(١) يقال لعلاقيتين أنها متطابقتين فقط عندما تكون الدوال المعرفة لها

متكافئة صوريا *formally equivalent* والعينة الرمزية لهذه الخاصية هي

$$\begin{aligned} 21.15 \quad [\psi(x, y) \equiv_{x,y} X(x, y)] &\equiv [\hat{x} \hat{y} \psi(x, y) \\ &= \hat{x} \hat{y} X(x, y)] \end{aligned}$$

(٢) يقال لعلاقيتين أنها متطابقتين فقط عندما تقوم كل من العلاقتين بين

نفس الأزواج من الحدود

$$\begin{aligned}
 21.31 \quad & \left[\hat{x} \hat{y} \psi (x, y) = \hat{x} \hat{y} X (x, y) \right] \\
 & \equiv \left[x \left\{ \hat{x} \hat{y} \psi (x, y) \right\} y \right] \\
 & \equiv_{x,y} \left[x \left\{ \hat{x} \hat{y} X (x, y) \right\} y \right]
 \end{aligned}$$

ويمكن التعبير عن هذه الصيغة بالصيغة التالية

$$21.43 \quad [R = S] \equiv [x \cdot R y] \equiv_{x,y} [X S y]$$

(٣) أما القضيتين الآتيتين فتوضحان أن العلاقات المتطابقة هي في جوهرها
انعكاسية reflexive وثنائية Symmetrical ومتعدية transitive

$$21.2 \quad \hat{x} \hat{y} \phi (x, y) = \hat{x} \hat{y} \phi (x, y)$$

$$21.22 \quad \hat{x} \hat{y} \phi (x, y) = \hat{x} \hat{y} \psi (x, y)$$

$$\left[\hat{x} \hat{y} \psi (x, y) = \hat{x} \hat{y} X (x, y) \right]$$

$$\supset \left[\hat{x} \hat{y} \phi (x, y) = \hat{x} \hat{y} X (x, y) \right]$$

(٤) يقال لحدين أنهما علاقة معلومة عندما يشبعان Satisfy دالة معرفه

$$21.3 \quad \left[x \left\{ \hat{x} \hat{y} \psi (x, y) \right\} y \right] = \left[\psi (x, y) \right]$$

(٥) أنه يمكن تحديد كل علاقة من طريق دالة حملية predicative function

$$21.151 \quad (\hat{x} \hat{y} \phi) \cdot \hat{x} \hat{y} (x, y) = \hat{x} \hat{y} \phi ; (x, y)$$

التعريفات الأساسية في حساب العلاقات

$$23.01 \quad (R \subseteq S) = [(x R y) \supset_{x,y} (x S y)]$$

$$23.02 \quad (R \dot{\cap} S) = \hat{x} \hat{y} (x R y \cdot x S y)$$

$$23.03 \quad R \dot{\cup} S = \hat{x} \hat{y} [(x R y) \vee (x S y)]$$

$$23.04 \quad \dot{\neg} R = \hat{x} \hat{y} \{ \sim (x R y) \}$$

$$23.05 \quad R \dot{\supset} S = R \dot{\cap} \dot{\neg} S$$

كما ويضع أصحاب المبادئ ثلاث تعريفات أساسية للعلاقة الكلية والعلاقة
الصفيرية ووجود العلاقات كما توضحها القضايا الآتية :-

$$25.01 \quad \dot{\forall} = \hat{x} \hat{y} (x = x \cdot y = y)$$

$$25.02 \quad \dot{\Lambda} = \dot{\neg} \dot{\forall}$$

$$25.03 \quad \dot{\exists} ! R = (\exists x, y) \cdot x R y$$

والحقيقة أن البرهنة على قضايا حساب العلاقات تدبر وفق نظام البرهنة المتبع
في نظرية حساب الفصول ، ولذلك وجدنا رسل وهو ايتهد وهما بصدد عرض
النظرية العامة للعلاقات وحساب العلاقات لا يقدمان لنا أى نوع من البرهنة الجديد،
بل نجدهما يشيران إلى انماط القضايا الخاصة بالعلاقات فقط ويميلان القارىء إلى
طرق البرهنة المستخدمة في مجال نظرية حساب الفصول ، مما يؤكد أن طريقة
البرهنة في مجال النظريتين واحدة . لكن ثمة أمر جديد وهام في مجال العلاقات ،

ويتمثل في الجزء الخاص بحساب ميدان العلاقات أو عكسها بما تتناوله نظرية العلاقات، والبحث التفصيلي والتحليل الرياضي في القسم الثالث من الجزء الأول من كتاب المبادئ بعنوان «منطق العلاقات». ولذا فأننا سنتناول كل موضوع من موضوعات القسم الثاني على حده لتعرض فيه لأهم القضايا وبعض نماذج البراهين.

أولاً :- عكس العلاقات Converses of Relations

توجد لدينا في إطار هذا الموضوع ثلاث قضايا أساسية تحدد خصائص عكس العلاقة وهي :-

$$31.13 \quad E \vdash \text{Cnv} \circ P$$

كل علاقة لها عكس

$$31.32 \quad [P = Q] \equiv \left[\begin{smallmatrix} U \\ P \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} U \\ Q \end{smallmatrix} \right]$$

يقال لعلاقين أنها متطابقتان فقط ، إذا ما كان عكسها كذلك

$$31.33 \quad \text{Cnv} \circ \text{Cnv} \circ P = P$$

أي علاقة هي عكس عكسها

نماذج البرهين

□ ١ برهن على أن

$$31.12 \quad \begin{smallmatrix} U \\ P \end{smallmatrix} = \text{Cnv} \circ P$$

البرهان

تنص القضية رقم (٣١٠١) على أن

$$(Q \text{ Cnv } P) \cdot (R \text{ Cnv } P) \supset Q = R \quad (١)$$

يوضع $\overset{U}{P}$ مكان R في رقم (١) ينتج أن

$$(Q \text{ Cnv } P) \cdot (\overset{U}{P} \text{ Cnv } P) \supset Q = \overset{U}{P} \quad (٢)$$

والقضية رقم (٣١١١) تنص على أن

$$\overset{U}{P} \text{ Cnv } P$$

وهي قضية صادقة، إذن يمكن حذفها من رقم (٢) فينتج أن

$$(Q \text{ Cnv } P) \supset Q = \overset{U}{P} \quad (٣)$$

من رقم (٣) والقضية (١٠١١) التي تقر أن ما هو صادق بالنسبة لكل فهو صادق أيضا بالنسبة للجزء، ومن القضية رقم (٣١١١) ينتج أن

$$(\overset{U}{P} \text{ Cnv } P) \cdot (Q \text{ Cnv } P) \supset_Q Q = \overset{U}{P}$$

ومن القضية رقم (٣٠٣١) والتي تنص على أن

$$[x = R \cdot y] \equiv (x R y) [z R y \supset_z z = x]$$

ينتج أن

$$\overset{U}{P} = \text{Cnv} \cdot P$$

[٢] برهن على أن

$$31.21 \quad \text{Cnv} \circ \dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}$$

البرهان

تنص القضية رقم (٣١٠٣١) على أن

$$x (\text{Cnv} \circ P) y \equiv y P x$$

بتطبيق هذه الصورة على صورة القضية رقم (٣١٠٣١) التي لدينا
ينتج أن

$$x (\text{Cnv} \circ \dot{\Lambda}) y \equiv y \dot{\Lambda} x \quad (1)$$

وتنص القضية رقم (٢٥١٠٥) على أن

$$(x, y) \circ \sim (x \dot{\Lambda} y) \quad (2)$$

∴ من بتطبيق رقم (٢) على الصورة التي لدينا في (١) ينتج أن

$$\sim x (\text{Cnv} \circ \dot{\Lambda}) y \quad (3)$$

من رقم (٣) ومن القضية رقم (١١١١١) التي تنص على أنه إذا كانت
(z, ω) ≠ صادقة معها كانت z ≠ ω فإن

$$(x, y) \circ \neq (x, y)$$

تكون صادقة

ومن القضية رقم (٢٥١٠٥) والتي تنص على أن

$$[(x, y) \cdot \sim (x R y)] \equiv [R = \hat{A}]$$

ينتج أن

$$\text{Cnv} \hat{A} = \hat{A}$$

هـ ط. ث

ثانياً : الميادين ، عكس الميادين ومجالات العلاقات

Domains, Converse Domains, And Fields of Relations

يقوم حساب الميدان والميدان العكس ومجال العلاقات على أساس مجموعة من التعريفات والصيغ الأساسية :-

الصيغ الأساسية

$$D'R = \hat{x} \{ (\exists y) \cdot x R y \} \quad (١) \text{ ميدان العلاقة}$$

$$C'R = \hat{y} \{ (\exists x) \cdot x R y \} \quad (٢) \text{ عكس الميدان}$$

$$C'R = \hat{x} [(\exists y) \{ (x R y) \vee (y R x) \}] \quad (٣) \text{ مجال العلاقة}$$

التعريفات الأساسية

$$33.01 \quad D = \hat{a} \hat{R} [a = \hat{x} \{ (\exists y) \cdot x R y \}]$$

$$33.02 \quad C = \hat{B} \hat{R} [B = \hat{y} \{ (\exists x) \cdot x R y \}]$$

$$33.03 \quad C = \hat{y} \hat{R} [y = \hat{x} \{ (\exists y) \{ (x R y) \vee (y R x) \} \}]$$

$$\vee (y R x) \}]$$

$$33.04 \quad P \equiv x \hat{R} \left[(\exists y) \{ (x R y) \vee (y R x) \} \right]$$

نماذج البراهين

(١) المطلوب البرهنة على أن

$$33.22 \quad C' R = C' R$$

البرهان

من القضية رقم (٢٢ر١٦) والتي تنص على أن

$$C' R = D' R \cup Q' R$$

والقضية رقم (٢٢ر٢) والتي تنص على أن

$$Q' R = D' \overset{U}{R}$$

والقضية رقم (٢٢ر٢١) التي تنص على أن

$$D' R = Q' \overset{U}{R}$$

نستنتج أن

$$C' R = Q' \overset{U}{R} \cup D' \overset{U}{R}$$

ومن القضية رقم (٢٢ر١٦)

$$C' R = C' R$$

∴

المطلوب البرهنة على أن ٢

$$23.15 \quad \overrightarrow{R} \circ y \subseteq D \circ R$$

البرهان

نص القضية رقم (٢٢٠١٨) على أن

$$x \in \overrightarrow{R} \circ y \equiv x R y$$

ومنها نستنتج أن

$$x \in \overrightarrow{R} \circ y \supset_x x R y$$

وبين القضية رقم (١٠٠٢٤) والتي تنص على أن

$$\phi y \supset (\exists x) . \phi x$$

نستنتج أن

$$x \in \overrightarrow{R} \circ y \supset_x (\exists y) . x R y$$

وبين القضية رقم (٢٢٠١٢) والتي تنص على أن

$$x \in D \circ R \equiv (\exists y) . x R y$$

$$\overrightarrow{R} \circ y \subseteq D \circ R$$

ثالثاً :- حاصل الضرب النسبي لعلاقين

توجد لدينا ثلاث تعاريف أساسيه في حاصل الضرب النسبي هي

$$34.01 \quad R \setminus S = \hat{x} \hat{z} \left[(\exists y) \cdot \{ (x R y) \cdot (y S z) \} \right]$$

$$34.02 \quad R^2 = R \setminus R$$

$$34.03 \quad R^3 = R^2 \setminus R$$

نماذج البراهين

برهن على أن

$$34.54 \quad x R x \supset x R^2 x$$

البرهان

. القضية رقم (٤٢٤) تنص على أن

$$P \equiv P \cdot P$$

ومنها نستنتج بالتطبيق على صورة القضية الى لدينا أن

$$x R x \supset (x R x) \cdot (x R x)$$

ومن القضية رقم (١٠٢٤) التي تنص على أن

$$\phi y \supset (\exists x) \cdot \phi x$$

نستنتج أن

$$x R x \supset (\exists y) [(x R y) \cdot (y R x)]$$

ومن الأمثلة رقم (٢٤٥) التي تنص على أن

$$x R^2 y \equiv (\exists z) [(x R z) \cdot (z R y)]$$

∴ نستنتج أن

$$x R x \supset x R^2 x$$

هـ. ط. ث.

إنصح لنا بما سبق من البراهين أن نظام البرهنة في نطاق نظرية حساب العلاقات يبرر وقع الجهاز العام للاستنباط في نسق مبادئ الرياضيات . إلا أن هناك صوراً أخرى متقدمة من حساب العلاقات قد استبعدت من ميدان هذه الدراسة أساساً لأنها مما يهم الرياضيين بصورة مباشرة ، ولذلك فقد فضلنا أن نعرض فقط بجانب حساب العلاقات في إطار أبحاث المنطق الرياضي .

الباب السادس
نظرية الأوصاف

الباب السادس

نظرية الأوصاف

Theory of Descriptions

فضلنا أن نعالج نظرية الأوصاف بعيدا عن النظريات الأربعة الأساسية للمنطق الرياضي ، لأن هذه النظرية تتمتع بأهمية كبرى في الجهاز المنطقي والنسق الفلسفي لرسول . فم تشهد نظرية من نظريات المنطق الحديث اهتمام رسول المباشر ، بقدر ما أتيح هذا لنظرية الأوصاف .

والواقع أن تأسيس نظرية الأوصاف يعد عملا ضخما في عالم الفكر المنطقي والفلسفي على السواء للأسباب الآتية : —

أولا : — أن النظرية في حد ذاتها عملا إبتكاريا جديدا ، فالأفكار التي تتناولها لم ترد من قبل في أعمال السابقين على رسول .

ثانيا : — أن النظرية تعتبر أداة منطقية مفيدة على حد قول موريس فيتز (1) . في إقامة تميزات منطقية دقيقة بين اسم العلم proper name ، العبةارة الوصفية descriptive phrase ، أو بين الرمز البسيط والرمز المركب .

ثالثا : — ومن الناحية الإستمولوجية فإن نظرية الأوصاف تميز بين المعرفة بالاتصال المباشر Knowledge by acquaintance والمعرفة بالوصف Knowledge

(1) Weitz, M., Analysis and unity in Russell's Philosophy p. 95

by description ، رغم أننا قد نجد هذه الناحية في أعمال القديس أوغسطين Augustine ، على حد قول روبرت مارش (١) Marsh .

رابعا : — أن نظرية الاوصاف هي بمثابة رد قوى على نظريات السيكلوجيين من أمثال برتانو Brentano ومينونج Meinong .

خامسا : — أن رسل استطاع أن يضع نظرية الاوصاف كجزء أساسى من النسق الاستنباطى ، لمبادئ الرياضيات .

تلك هي الإعتبارات الأساسية التى أعتبرت من أجلها نظرية الاوصاف عملا ابتكاريا فى مجال الفلسفة والمنطق على السواء ، والتى جعلت «فرانك رامزى» F. Ramsey يصفها بأنها «نموذج الفلسفة» ، (٢) Paradigm of philosophy .

لقد تابع رسل دراسات «فريجه» فى المعنى والدلالة meaning and denotin ، حيث أهتم بدراسة التحليل المنطقى للرموز دراسة مركزة من أجل تطوير دراسات المنطق . ومن ثم فقد تحتم عليه أن يضع دراسات السابقين كمادته دائما حينما يناقش نظرية من النظريات المنطقية . تحت جهر التحليل المنطقى الدقيق .

ومن النظريات العامة التى ركز رسل على دراستها نظرية «برتانو» ، فى تفسيره للإدراك إلى عناصر ثلاث هي ، الفعل act ، والمحتوى أو المضمون Content ، والموضوع object ، والتى تابعه فيه «مينونج» (٣) تحت تأثير نزعه السيكلوجية .

(١) Marsh, R. C , (ed). logic and knowledge, p. 25
(٢) Ramsey, F., The Foundations of Mathematics, P: 263
(٣) Russell, B., On Propositions, P. 305, ed. in. " Logic and Knowledge .

وجد رسل أن الاتجاه السيكيولوجى فى تحليل الإدراك ، على هذا النحو ، لا يتفق مع ما ذهب إليه « وجورج مور » فى إيجامها الواقعى الجديد . لأن تمييز السيكيولوجيين ينطوى على التمييز بين « المضمون الموضوعى » Objective Content « وموضوع الإدراك » object of perception ، وهذا التمييز من وجهة نظر رسل ومور ليس ضروريا ، لأنه ينطوى على تناقض .

والحقيقة أن رسل فى صدر شبابه وحتى تدوين « أصول الرياضيات » كان يشارك « مينونج » معظم مواقفه الأساسية ، إلا أنه فيما بعد « الأصول » أخذ يراجع مواقفه الأساسية فيما يختص بنظرية المعرفة ، خاصة وقد تبين له أن هذا الموقف لن يمسكته ، بصفة نهائية ، من رفض دعوة المثاليين التى أضعف فسادها . ونتيجة لمراجعة نظرية مينونج توصل رسل لنظرية الأوصاف التى تناولها بالصياغة والشرح والتفصيل أكثر من أربعة وخمسين عاما (١) .

(١) ظهرت أول صياغة لنظرية الأوصاف فى مقالة رسل بعنوان On Denoting التى نشرت فى مجلّة مايند Mind عام (١٩٠٥) حيث عرض لنا موقفه الأساسى بالنسبة لعبارات الدالة وإسم العالم ، ثم أخذ يناقش موقف « مينونج » .
وفى عام (١٩١٠) ناقش رسل النظرية فى مبادئ الرياضيات حيث صدر الجزء الأول ، وقد جاءت مناقشته للنظرية وجهازها الاستنباطى فى المواضع الآتية : -

(أ) من ص ٣٠ إلى ص ٣٢ (ب) من ص ٦٦ إلى ص ٧١ (ج) من ص ١٧٢ إلى ص ١٨٦ .

وصدرت فى عام (١٩١١) مقالة أخرى لرسل تتناول هذا الموضوع بعنوان :
Knowledge by Acquaintance and Knowledge by Description
لكن مناقشة النظرية [إستمولوجيا ومنطقيا] وردت بصورة حاسمة فى « مشكلات الفلسفة » . ||

تعد نظرية الأوصاف التي يقولها رسل على إدامة تمييزين نوعين من
رموزهما: أسماء الأعلام، والأوصاف. فاسم شيء هو لا رمز بسيط (١)،
لشئ ذي وجود في الخارج، وهذا يفرق بوجود في الخارج هو معنى
رمز. والأمر هو ما يشير إليه، ويكون لاسم العلم معه امتثل تماما عن بقية
الكلمات التي تواف الخة أو القضية.

أما الوصف، فهو رمز مركب Complex Symbol مثل مؤلف ويفرق،
The author of werecree. وهذا الرمز المركب لا يشير إلى أفراد مباشرة،
أي موضوع الحقيقة الموجود في الخارج كما هو الحال بالنسبة لاسم العلم.
والرمز المركب، أي الوصف يخلق فيه رمز مصطلح الرمز ناقص - incomp-

تعد أهم أعماله: "The problem of philosophy" (١٩١٨) "The nature of Acquaintance" حيث أنه
يناقش نظريات "ماخ" Mach و"جيمس" James وعرض تشاوس حول مؤلفه
الأساسي نظريته المسماة (بالواحدية الخيوية) "Neutral Monism" (١٩١٨) وفي عام ١٩١٩
(١٩١٩) حاول شرح نظريته شرح دقيق من خلال (نفسه النظرية منطقية) "The phi-
losophy of logical Atomism" وبيان فترة أوسع على فلسفته بأحد تسجيلات نصية
لمناقشة الحرب والتمرد إنجلترا فيها، كتب رسل مرة ثانية من حرية الأوصاف في "مقدمة
فلسفة الرياضيات" (١٩١٩) "Introduction to Mathematical philosophy"
وقد رد رسل على بعض الانتقادات (جورج مور) الخاصة بنظرية الأوصاف وهي نشرت في
المؤلف الذي أعده شليب عام (١٩١٩) في عام ١٩٢٠ دون رسل أي حركة فلسفية،
و"تطور فلسفي" philosophical Development ولا حيث ظهر في "تطور فلسفي"
مقيما وعرض جوانبها لأصحابه،

etc Symbole ، لانه لا معنى له بمفرده ، أو بمعزل عن بقية ألفاظ القضية ،
لأن الوصف يكتسب معناه من خلال سياق الحديث مع غيره من الرموز .
والأوصاف تبعاً لنظرية رسل نوعان :

(١) أوصاف محددة definite descriptions وهي الأوصاف التي
تشير عباراتها إلى شيء معين ، أو جزئي مسبق بأداة التعريف ، أل ، وتكون
صورتها ، الكذا وكذا ، (١) (The So-and-So) .

(٢) الوصف المبهم Ambiguous description
وهو ذلك الوصف الذي يدل بإيهام مثل ، قابلت رجلاً ، وهذا النوع من
الوصف يتخذ صورته ، كذا وكذا ، عند الحديث " a so - and - so " .
أهتم رسل بتحليل القضايا التي تحتوي على أوصاف محددة ، لأن تحليل
مثل هذه القضايا يمكننا من الحديث عن الموضوعات المتناقضة بذاتها - self-contr-
adictory ، تلك الموضوعات التي لا تقوم في الواقع الخارجي ، وليست لدينا
إمدادات حسية عنها ، ويكون وجودها ممكن فقط من ناحية التصور المنطقي ،
وبالتالي فإن القضايا التي تتضمن أوصافاً محددة ، يصبح أمر معالجتها على أنها دوال
قضايا ذات متغيرات أمراً سهلاً . وهذا ما جعل رسل يؤكد لنا أن العبارة :

« تدل بمقتضى صورتها ، ومن ثم فانه ينبغي أن ،

« تميز بين حالات ثلاث : (١) أن العبارة قد تدل ، ،

« ولا تدل على أي شيء في نفس الوقت مثل ، الملك الحالي ،

(١) Russell, B., (a) P. L. Atomism, P. 234 (b) Introduction
to Mathematical philosophy, ch. 16

- د لفرنسا ، ؛ (٢) أن العبارة قد تدل على موضوع ،
- د واحد محدد ، مثل د الملك الحالي لانجلترا ، فهي تدل على ،
- د شخص معين بالذات ؛ (٣) أن العبارة قد تدل ،
- د بإيهام مثل د رجلا ما ، فإنها لا تدل على رجال كثيرين ،
- د بل على إنسان ما مبهم . . (١)

هنا نتساءل : ما هو تحليل رسل للعبارات الدالة ؟

ينبثق تحليل رسل للعبارات الدالة denoting phrases من فكرته عن المتغير (٢) ، فإذا قلنا د $X \text{ has } Z$ ، فإن هذا التعبير إنما هو دالة قضية تعتبر فيها (x) مكون أساسي غير محدد undetermined ، وهنا فإنه ينظر إليها على أنها متغير .

وفكرة رسل عن المكون غير المحدد تعتبر من الأفكار الدقيقة التي يمكن من خلالها تفسير بعض المفاهيم المنطقية مثل : د كل شيء ، everything ، د شيء ما ، something ، د لا شيء ، nothing ؛ من حيث أصبحت عبارات دالة (٣) . ومعنى هذا أن هذه المفاهيم أصبحت من قبيل الرموز الناقصة لأنه ليست لها معنى بمعزل عن بقية أجزاء القضية . فجوهر العبارات الدالة يتمثل العبارة الدالة ليست بذات معنى في حد ذاتها ، بل أن كل قضية من القضايا تكاسب معناها من خلال التعبير اللفظي المتكامل والذي يضاف على القضية معناها .

(١) Russell, B., On Denoting, P. 41

(٢) weits, M., op - cit. P. 95

(٣) Russell, B., On Denoting, P. 42

فإذا قلنا ، قابلت رجلا ما ، I met a man ، فإن تحليل هذه العبارة وفقا
لرأى رسل وفكرته عن دالة القضية والمتغير ، يصبح :

« دالة القضية ، قابلت x وأن x أنسان ، ليست كاذبة دائما ، .
لكن ما هو تحليل رسل للقضايا من النوع ، المربع الدائري ، أو ، الملك الجال
لفرنسا ، أو ، الجبل الذهبي ، . ما هو تحليله لصورة هذه القضايا من حيث الصدق
والمعنى ؟

إكتشف رسل التناقض الذى انتهى اليه « مينونج » ، فى نظريته بعد تحليل دقيق
للعبارات الدالة . فبينما زعم مينونج أنه يمكننا أن نتصور الشيء الذى هو « مربع ،
ودائري فى نفس الوقت . أكد رسل أن تقرير مينونج على هذا النحو يعد خروجاً
على قانون عدم التناقض ؛ لأنه كيف يمكن لنا أن نبث وجود « المربع الدائري ،
والواقع يكرر هذا تهما ؟

من هنا وجدنا رسل يقدم لنا فكرته عن الأوصاف المحددة حتى لا يقع فى
التناقض الذى وقع فيه مينونج . ويتضح لنا فحسوى هذه النظرية إذا ما نظرنا
فى صورة المثال التالى :

« مؤلف ويفرلى ، The author of waverley

« مؤلف ويفرلى ، هنا ليست إسم علم ، بل رمز ناقص ، وقد اعتبرها رسل
إرمز ناقص لثلاثة أسباب :

- (١) أنها رمز مركب ، لأنها لا تشير إلى جزئى متحقق فى الخارج .
- (٢) أن معناها يتحدد ، مباشرة عبارة بمجرد معرفتنا لمعاني الكلمات كالتي

تتألف منها العبارة (١). بينما إسم العلم لا يتحدد بمعاني الكلمات ، بل بمعرفتنا للشخص أو الفرد الذى ينطبق عليه الإسم . (٢)

(٣) أنه إذا ما كانت هذه العبارة اسم علم ، فإنها ستصبح « سكوت Scott كان * مؤلف ويفرلى ، إما أنها قضية تحصيل حاصل أو كاذبة ومن ثم فإنه إذا كانت « مؤلف ويفرلى ، إسم علم ، فإنه يمكن لنا أن نضع بدلا منها اسم العلم « سكوت ، وتصبح قضيتنا على الصورة :

« سكوت كان سكوت ، Scott was scott »

أما إذا كان إسم العلم هو اسم آخر بخلاف «سكوت ، فإن القضية ستصبح كاذبة وما يجعلنا نذهب الى القول بأن العبارات الوصفية هي رموز ناقصة ، فإن ذلك يتمثل فى أن ما تشير اليه العبارات الوصفية لا يعد من مكونات القضية (٣) ، لانه ليس هناك كائن فعلى موجود فى الخارج يمكن أن نعتبره بمثابة معنى للعبارة الدالة ، ولأنه لا يوجد من بين مكونات القضية ما يقابل هذا الوصف .

وما هو أساسى بالنسبة لتحليل الأوصاف المحدده ، هو أنها فى عملية التحليل لا تتكون من الأوصاف ذاتها ، بل من القضايا التى ترد فيها . وأفضل طريقة لتحليل القضايا من هذا النوع هو أن ننظر فى المناسبات التى تجعل الوصف كاذب .

(١) ويتضح لنا ذلك بصورة أكثر وضوحا فى اللغة الانجليزية ، فالمقصود بمعانى الكلمات التى تتألف منها العبارة هى الكلمات waverley - of - author - the بينما فى اللغة تربية نجد لدينا لفظتان فقط هما مؤلف - ويفرلى -

(2) Russell, B., P. L. Atomism, Lecture VI

(3) Ibid

(٤) وضعنا العبارة على هذا النحو لتتفق مع صورتها الشعرية فى اللغة الانجليزية .

فإذا ما نظرنا للقضية ، سكوت كان مؤلف ويفرلى ، لوجدنا أن هذه القضية تكون كاذبة في حالات ثلاثة فقط هي : -

الحالة الاولى : إذا لم تكن قصة ويفرلى كتبت فعلا .

الحالة الثانية : إذا كان هناك أشخاص كثيرين كتبوا ويفرلى .

الحالة الثالثة : إذا لم يكون ، سكوت ، هو الذى كتب ويفرلى .

ونبقى شرط الكذب في هذه الحالات الثلاث يكون على النحو التالى : -

الأقل فرد واحد كتب ويفرلى .

الحالة الاولى : X كتب ويفرلى ، ليست كاذبة دائما . أى أنه يوجد على

الأقل فرد واحد كتب ويفرلى

الحالة الثانية : إذا كان X ، y كتبوا ويفرلى ، فإن X ، y يكونان

متطابقان . أى على الأكثر هناك فرد واحد كتب ويفرلى .

الحالة الثالثة : إذا كان X قد كتب ويفرلى ، فإن X كان سكوت ،

صادقة دائما .

ومن ثم فإن القضايا الثلاث معا تقرر أن

X كتب ويفرلى ، تكافئ دائما X كان سكوت . .

وهناك مثال أخرى قدمه رسل للعبارات الدالة التى تنطوى وفق تحليل مينونج

على الخروج الصريح على قانونى عدم التناقض والثالث المرفوع . فالقضية التى

تقرر أن ، الملك الحالى لفرنسا أصلح ، $The\ present\ King\ of\ France\ is\ bla$

إذا ما نظرنا إليها من وجهة النظر التحليلية الدقيقة ، لقلنا أنه من المعروف أنه

ليس هناك فى فرنسا ملوك الآن . ومن ثم ينشأ لدينا تساؤل هام : هل تكون

هذه العبارة صادقة أم كاذبة ؟ انه إذا ما افترضنا كذب هذه العبارة ، فانه وفقا

للقانون الثالث المرفوع يكون التقرير $assertion$ بأن ، الملك الحالى لفرنسا ليس

أصلع ، The present king of France is not bald ، تقريراً صادقا . لكن
تقريرنا بأن الملك الحالي لفرنسا له رأس ذات شعر يصبح تقريراً كاذباً كتقريرنا
أن الملك الحالي لفرنسا أصلع . . لكنه يتضح لنا أن القضيتين ، الملك الحالي لفرنسا
أصلع ، ، الملك الحالي لفرنسا ليس أصلع ، تخالفان قانون الثالث المرفوع
فعلا عن أن إقراض صدقها مما يعد خروجاً على قانون عدم التناقض .

ومن ثم فإنه لغرض المنطق ، ولعدم الإخلال بقوانينه وجدنا رسل ينظر
للعبارات التي صورتها ، الكذا والكذا ، وبصفة عامة كل وصف له
هذه الصورة ، لا على أنها صادقة أو كاذبة ، بل إنها في جوهرها ، بلامعنى ،
meaningless . وهذا هو ما جعله يتمكن من حل المشكلة الأساسية للأوصاف
عن طريق استخدام الدوال الوصفية descriptive Functions من حيث أنها
تسمح لنا بأن نتحدث عن الأشياء التي لا نتصل بها اتصالاً مباشراً^(١) . واستخدامنا
لفكرة الدوال هنا هو ما يسميه رسل ، بالتعريف في الإستعمال ،^(٢)
definition in use للوصف .

(١) Russell, B., The problems of philosophy, P. 92 .
(٢) Principia, V. I, P. 66

التعريفات الأساسية (١)

$$14.01 [(1x) (\phi x)] . \psi (1x) (\phi x) . = : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \psi b$$

$$14.02 E ! (1x) (\phi x) . = : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b$$

$$14.03 [(1x) (\phi x) . (1x) (\psi x)] . f \{ (1x) (\phi x), (1x) (\psi x) \} . = :$$

$$[(1x) (\phi x) : (1x) (\psi x)] . f \{ (1x) (\phi x), (1x) (\psi x) \}$$

$$14.04 [(1x) (\psi x)] . f \{ (1x) (\phi x), (1x) (\psi x) \} . = .$$

$$[(1x) (\psi x), (1x) (\phi x)] . f \{ (1x) (\phi x), (1x) (\psi x) \}$$

نماذج البراهين

نبرهن على صدق القضية رقم (١٤٠١١١) والتي تنص على أن

$$[(1x) (\psi x)] . f \{ (1x) (\phi x), (1x) (\psi x) \} . \equiv : (\exists b, c) : \phi x .$$

$$\equiv_x . x = b : \psi x . \equiv_x . x = c : f(b, c)$$

(١) وجدنا أنه من الأفضل الإبقاء على النقط بدلا من الأقواس ، لانه الأقواس في قضايا الأوصاف كثيرة ، وحتى لا تختلط مجالات الأقواس بعضها يفضل استخدام النقط .

البرهان

تضمن القضية رقم (٤٠٢) على أن

$$P \equiv p \quad (١)$$

كما وتضمن القضية رقم (٤٠٤) على أن

$$[(1x) (\psi x)] : \{ (1x) (\phi x), (1x) (\psi x) \} . = . [(1x) (\psi x), (1x) (\phi x)]$$

$$\{ (1x) (\phi x), (1x) (\psi x) \} \quad (٢)$$

وتضمن القضية رقم (٤٠٣) على أن

$$[(1x) (\phi x), (1x) (\psi x)] . \{ (1x) (\phi x), (1x) (\psi x) \} . = :$$

$$[(1x) (\phi x)] : [(1x) (\psi x)] . \{ (1x) (\phi x), (1x) (\psi x) \} . = (٣)$$

(١) ، (٢) ، (٣) تتضمن أن

$$[(1x) (\psi x)] : \{ (1x) (\phi x), (1x) (\psi x) \} . \equiv : . [(1x) (\psi x)] :$$

$$[(1x) (\phi x)] . \{ (1x) (\phi x), (1x) (\psi x) \}$$

والقضية رقم (٤٠١) والتي تنص على أن

$$[(1x) (\phi x)] . \psi (1x) (\phi x) . \equiv : (x b) : \phi x . \equiv : x = b : \psi b$$

تُكافئ

$$[(1x) (\psi x)] : . (x b) : \phi x . \equiv_x x = b : f \{ b, (1x) (\psi x) \}$$

ومنه القضية تُكافئ أيضا أن

$$(2c) : . \phi x \equiv_x x = c : . (x b) : . \phi x . \equiv_x x = b : f (b, c)$$

، والقضية رقم (١١٥٥) والتي تنص على أن

$$(2xy) : . \phi x . \psi (x, y) . \equiv : (x) : \phi x : (xy) . \psi (x, y)$$

تُكافئ

$$(2bxc) : \phi x . \equiv_x x = x c : \psi x . \equiv_x x = b : f (b, c)$$

، الطرف الأيمن يُكافئ الطرف الأيسر وهذا يتضمن أن القضية رقم

(١١١١) قضية صادقة ،

... ط

برهن على صدق القضية رقم (١٤١٢) والتي تنص على أن

$$E \mid (1x) (\phi x) . \supset : \phi x . \phi y . \supset_{x,y} :$$

البرهان

تنص القضية رقم (١٤١١) على أن

$$E \vdash (ix) (\phi x) . \equiv : (x b) : \phi x . \equiv_x . x = b$$

وهذه القضية تتضمن فرضاً أن

$$(x b) : \phi x . \equiv_x . x = b \quad (١)$$

والقضية (٤٣٨) تنص على أن

$$P \equiv r . q \equiv S . \supset : p . q \equiv \quad (٢)$$

والقضية رقم (١٠٠١) تقرر أن

$$(x) \phi . \supset \phi y$$

والقضية رقم (١١٣) تنص على أن

$$p \supset . (x, y) . \phi (x, y) : \equiv : (x, y) : p . \supset . \phi (x, y) - (١)$$

من ٢ ، ٣ ، ٤ ، القضية (١١١١) تتضمن أن

$$\phi x . \equiv_x . x = b : \supset : \phi x . \phi y . \equiv_{x, y} . x = b . y = b$$

وصورة القضية رقم (١٣١٧٢) والتي تنص على أن

$$y = x . z = x . \supset . y = z$$

تضمن أن

$$\exists_{x,y} . \dot{x} = y \quad (٥)$$

∴ من رقم (٥) في القضية (١٠ر١١) القضية (١٠ر٢٣) والتي تنص على أن

$$(x) . \phi x \supset p . \equiv : (\exists x) . \phi x . \supset . p$$

يتبع أن

$$(\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \supset : \phi x . \phi y . \supset_{xy} . \dot{x} = y \quad (٦)$$

من (١) و (٦) يتبع لنا أن الطرف الأيمن من القضية (١٤ر١٢) يتضمن الطرف الأيسر.

∴ ط . ث .

برهن على صدق القضية رقم (١٤ر٢١) والتي تنص على أن

$$\phi x . \equiv_x . = b : \phi x . \equiv_x . x = c : \supset . b = c$$

البرهان

القضية (١٠ر١١) والتي تنص على أن

$$(x) . \phi x . \supset . \phi y$$

تضمن فرضاً أن

$$\phi b . \equiv . b = b : \phi b . \equiv . b = c$$

والقضية رقم (١٢١٥) والتي تنص على أن

$$x = x \quad (١)$$

تضمن أن

$$\phi b : \phi b . \equiv . b = c$$

∴ من صورة قانون الترابط ومن (١)، (٢) ينتج أن

$$b = c$$

وهذا يتضمن الطرف الأيمن من القضية

∴ ط . ث

برهن على صدق القضية رقم (١٤١٢٢) والتي تنص على أن

$$\phi x . \equiv_x . x = b : \equiv : \phi x . \supset_x . x = b : \phi b : \equiv$$

$$: \phi x . \supset_x . x = b : (\exists x) . \phi x$$

البرهان

القضية رقم (١٠٢٢) تنص على أن

$$(\pi) . \phi x . \psi x . \equiv : (\pi) . \phi x : (\pi) . \psi x$$

تضمن أن

$$\phi x . \equiv_x . x = b : \equiv : \phi x . \supset_x . x = b : x = b .$$

$$\supset_x . \phi x \quad (١)$$

والقضية رقم (١٢١٩١) من قضايا الذاتيه تؤكد أن

$$y = x . \supset y . \phi y : \equiv . \phi x$$

بتطبيق هذه الصورة على رقم (١) ينتج أن

$$\phi x . \equiv_x . x = b : \equiv : \phi x . \supset_x . x = b : \phi b \quad (٢)$$

والقضية رقم (٤٧١) تنص على أن

$$p \supset q . \equiv : p . \equiv . p . q$$

تضمن أن

$$\phi x . \supset . x = b : : \phi x . \equiv . \phi x . x = b$$

والقضية (١٠٢٧) تقرر أن

$$(x) . \phi x \supset \psi x . \supset : (x) . \phi x . \supset . (x) . \psi x$$

∴ من القضية (١٠٢٧) و القضية (١٠٢٧) ينتج أن

$$\phi x . \supset_x^1 . x = b : \supset : \phi x . \equiv_x . \phi x . x = b$$

$$\supset : (\exists x) . \phi x . \equiv . (\exists x) . \phi x . x = b$$

$$\equiv . \phi b \quad (٣)$$

وذلك باستخدام كل من القضية رقم (١٠٢٨١) و القضية رقم (١٢١٩٥)

∴ من (٢) و القضية رقم (٥٢٢) والى تقرر أن

$$p \supset q \equiv r : \equiv : p \cdot q = p \cdot r$$

يتبع أن

$$\phi x \cdot x = b : (\exists x) \cdot \phi x : \equiv : \phi x \cdot \supset x$$

$$x = b : \phi b \text{ ————— (١)}$$

∴ من رقم (٢) و (٤) يتبع أن الطرفان متساويان

هـ ط ث.

برهن على صحتها القضية رقم (١٤١٢٣) والى تقرر أن

$$\phi (x, y) \cdot \equiv_{x, y} \cdot x = y \cdot y = x :$$

$$\equiv : \phi (x, y) \cdot \supset_{x, y} \cdot x = y : y = x : \phi (y, x) :$$

$$\equiv : \phi (x, y) \cdot \supset_{x, y} \cdot x = y \cdot y = x : (\exists x, y) \cdot \phi (x, y)$$

البرهان

تقرر القضية رقم (١١٣١) أن

$$(xy) . \phi (x,y) : (x,y) . \psi (x,y) : \equiv (x,y) : \phi (x,y) . \psi (x,y)$$

وهذه القضية تتضمن أن

$$\phi (z,\omega) . \equiv_{z,\omega} . z = x . \omega = y .$$

وتكافئ أن

$$\phi (z,\omega) . \supset_{z,\omega} . z = x . \omega = y : z = x . \omega = y .$$

$$\supset_{z,\omega} . \phi (z,\omega) \text{ ————— (١)}$$

وصورة القضية رقم (١٣٢١) والتي تنص على أن

$$z = x . \omega = y . \supset_{z,\omega} . \phi (z,\omega) : \equiv : \phi (x,y)$$

بتطبيق هذه الصورة على رقم (١) نجد أنها تكافئ أن

$$\phi (z,\omega) . \supset_{z,\omega} . z = x . \omega = y : \phi (x,y) \text{ ————— (٢)}$$

والقضية رقم (٤٧١) والتي تقرر أن

$$p \supset q . \equiv : p . \equiv . \quad q$$

نتضمن أن

$$\phi(z, \omega) \cdot \sup z = x \cdot \omega = y : \sup : \phi(z, \omega) \cdot \equiv \cdot \\ \phi(z, \omega) \cdot z = x \cdot \omega = y$$

ومن القضية رقم (١١٠١١) و (١١٠٣٢) التي تقرر أن

$$(x, y) : \phi(x, y) \cdot \sup \cdot \psi(x, y) : \sup : (x, y) \cdot \phi(x, y) \cdot \sup \cdot \\ (x, y) \cdot \psi(x, y)$$

ينتج أن

$$\phi(z, \omega) : \quad z, \omega \cdot z = x \cdot \omega = y : \sup : \phi(z, \omega) \cdot \equiv_{z, \omega} \cdot \\ z = x \cdot \omega = y : \sup : (\exists z, \omega) \cdot \phi(z, \omega) \cdot \equiv \cdot (\exists z, \omega) \cdot \phi(z, \omega) \cdot \\ z = x \cdot \omega = y \cdot \equiv \cdot \phi(x, y) \text{ ————— (٣)}$$

وذلك بتطبيق صورته القضية رقم (١١٠٣٤١) و (١٣, ٢٢)

∴ من (٢) و القضية رقم (٥٠٣٢) ينتج أن

$$\phi(z, \omega) \cdot \sup_{z, \omega} \cdot z = x \cdot \omega = y : (\exists z, \omega) \cdot \phi(z, \omega) : \\ \equiv : \phi(z, \omega) \cdot \sup_{z, \omega} \cdot z = x \cdot \omega = y : \phi(x, y) \quad (٤)$$

∴ من (٢) و (٤) ينتج أن القضية صادقة ،

برهن على صيرورة القضية رقم (١٤١٢٤) والتي تقرر أن

$$(\exists x, y) : \phi (z, \omega) \equiv_{z, \omega} . z = x . \omega = y . \equiv :$$

$$(\exists x, y) : \phi (x, y) : \phi (z, \omega) . \phi (u, v) \supset_{z, \omega, u, v} .$$

$$z = u . \omega = v$$

البرهان

نص القضية رقم (٢٠٢٧) على أن

$$p . q \supset q \text{ ————— (١)}$$

من (١) القضية (١٤١٢٣) السابق البرهنة عليها يتج أن

$$(\exists x, y) : \phi (z, \omega) . \equiv_{z, \omega} . z = x . \omega = y : \supset . (\exists x, y) .$$

$$\phi (x, y) \text{ ————— (٢)}$$

، . القضية رقم (١١١) نص على أن

$$(x, y) . \phi (x, y) . \supset . \phi (z, \omega)$$

، القضية رقم (٢٠٤٧) تقرر أن

$$p \supset r . q \supset s . \supset : p . q . \supset . r . s .$$

∴ من القضية (١١١) & (٢٠٤٧) يتج أن

$$\phi(z, \omega) : \equiv_{z, \omega} z = x, \omega = y : \supset : \phi(z, \omega) \cdot \phi(u, v) \cdot$$

$$\supset \cdot z = x \cdot \omega = y \cdot u = x \cdot v = y. \text{ ————— (٢)} \quad$$

ومن صورة القضية رقم (١٧٢ ر ١٣) والتي تقرر أن

$$y = x \cdot z = x \cdot \supset \cdot y = z$$

وتطبق هذه الصورة على رقم (٣) ينتج أن

$$z = u \cdot \omega = v \text{ ————— (١)}$$

من رقم (٤) وصورة القضية رقم (١١ ر ١١) لا صورة القضية

رقم (٢١ ر ٢٥) ينتج أن

$$(\exists x, y) : \phi(z, \omega) : \equiv_{z, \omega} z = x \cdot \omega = y ;$$

$$\supset : \phi(z, \omega) \cdot \phi(u, v) \cdot \supset \cdot z = u \cdot \omega = v \text{ ————— (٥)}$$

من رقم (٣) القضية (١١ ر ١١) القضية (١١ ر ٢) ينتج

أن

$$(\exists x, y) : \phi(z, \omega) \cdot \equiv_{z, \omega} z = x \cdot \omega = y ;$$

$$\supset : \phi(z, \omega) \cdot \phi(u, v) \cdot \supset_{z, \omega, u, v} z = u \cdot \omega = v$$

وبتطبيق مودة القضية رقم (١١١) ينتج أن

$$\begin{aligned} \phi(x,y) : \phi(z,\omega) \cdot \phi(u,v) \cdot \sup_{z, \omega, u, v} \cdot z = u \cdot \omega = v : \\ \sup_{z, \omega} : \phi(x,y) : \phi(z,\omega) \cdot \phi(x,y) \cdot \sup_{z, \omega} \cdot z = x \cdot \\ \omega = y : \sup_{z, \omega} : \phi(x,y) : \phi(z,\omega) \cdot \sup_{z, \omega} \cdot z = x \cdot \\ \omega = y : \sup_{z, \omega} : \phi(z,\omega) \cdot \equiv_{z, \omega} \cdot z = x \cdot \omega = y \quad (٧) \end{aligned}$$

وذلك باستخدام القضية رقم (٥٣٣) القضية رقم (١٤١٢٣)

ومن القضية رقم (١١٣٤) والتي تقرر أن

$$\begin{aligned} (x,y) : \phi(x,y) \cdot \equiv : \psi(x,y) : \sup : (\exists x,y) \cdot \phi(x,y) \cdot \equiv : \\ (\exists x,y) \cdot \psi(x,y) \end{aligned}$$

والقضية رقم (١١٤٥) والتي تص على أن

$$(\exists x,y) : p \cdot \phi(x,y) : \equiv : p : (\exists x,y) \cdot \phi(x,y)$$

ومن القضية رقم (١١١١) القضية رقم (٧) ينتج أن

$$\begin{aligned} (\exists x,y) \cdot \phi(x,y) : \phi(z,\omega) \cdot \phi(u,v) \cdot \sup_{z, \omega, u, v} \cdot z = u \cdot \\ \omega = v : \sup_{z, \omega} : (\exists x,y) : \phi(z,\omega) \cdot \equiv_{z, \omega} \cdot z = x \cdot \omega = y \quad (٨) \end{aligned}$$

∴ من (٢) و (٦) وينتج أن القضية رقم (١٤١٢٤) قضية صادقة

بوهن على صورة القضية رقم (١٤١٣) والتي تقرر أن

$$a \equiv (ix) (\phi x) . \equiv . (ix) (\phi x) \equiv a$$

البرهان

القضية رقم (١٤١) تقرر أن

$$[(ix) (\phi x)] . \psi (ix) (\phi x) . \equiv : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . \\ x \equiv b : \psi b$$

هذه القضية تتضمن أن

$$a \equiv (ix) (\phi x) . \equiv : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x \equiv b : a \equiv b ()$$

والقضية رقم (١٣١٦) تقرر أن

$$x \equiv y . \equiv . y \equiv x \text{ ————— } (r)$$

والقضية رقم (٤٣٦) تقرر أن

$$p \equiv q . \supset : p . r . \equiv . q . r \text{ ————— } (r)$$

$\therefore (r) \& (r)$ معا يتضمنان أن

$$\phi x . \equiv_x . x \equiv b : a \equiv b : \equiv : \phi x . \equiv_x . \\ x \equiv b : b \equiv a$$

٤. القضية (١٠٢٨١) تقرر أن

$$(x) . \phi x \equiv \psi x . \supset : (\exists x) . \phi x . \equiv . (\exists x) . \psi x$$

∴ من القضية (١٠ر٢٨١) & القضية (١٠ر١١) يتبع أن

$$(Ea,b) : \phi x . \equiv_x . x = b : a = b$$

$$\equiv : (Ea,b) : \phi x . \equiv_x . x = b : b = a :$$

$$\equiv : (Ix) (\phi x) = a \quad (٤)$$

وذلك بتطبيق صورة القضية رقم (١٤ر١)

∴ (١) & (٤) يتضمنان معا صدق القضية الأصلية

المطلوب البرهنة عليها .

هـ . ط . ت

برهن على صورة القضية رقم (١٤ر١١٤) والتي تقرر أن

$$(١١) (\phi x) \equiv (Ix) (\psi x) . (Ix) (\psi x) \equiv (Ix) (Xx) . \supset .$$

$$(Ix) (\phi x) \equiv (Ix) (Xx)$$

البرهان

القضية رقم (١٤ر١١١) والتي سبق البرهنة عليها تضمن أن

$$(Ea,b) : \phi x . \equiv_x . x = a : \psi x . \equiv_x . x = b : a = b : .$$

$$(Ea,b) : \psi x . \equiv_x . x = c : Xx . \equiv_x . x = d : c = d : ,$$

والقضية رقم (١٣١٩٥) والتي تقرر أن

$$(\exists y) . y \equiv x . \phi y . \equiv . \phi x$$

تتضمن أن

$$(\exists a) : \phi x . \equiv_x . x = a : \psi x . \equiv_x . x = a \quad : .$$

$$(\exists C) : \psi x . \equiv_x . x = C : \forall x . \equiv_x . x = C \quad : .$$

والقضية رقم (١١٥٤) تتضمن أن

$$(\exists a, C) : \phi x . \equiv_x . x = a : \psi x . \equiv_x . x = a :$$

$$\psi x . \equiv_x . x = C : \forall x . \equiv_x . x = C \quad : .$$

والقضيتان (١٤١٢١) و (١١٥٤٢) تتضمنان معا أن

$$(\exists a, C) : \phi x . \equiv_x . x = a : \forall x . \equiv_x . x = C : a = C : .$$

$$\supset : . (\exists x . \phi x) \equiv (\exists x) (\forall x)$$

وذلك باستخدام القضية رقم (١٤١١١) وعلا يتضمن أن القضية

الأساسية قضية صادقة

نصوص مختارة

The Development of Symbolic Logic

The origins of modern Symbolic logic may be traced back to the Contributions of the great German mathematician and philosopher of the Seventeenth Century, G. W. Von Leibniz (1646 - 1716). A precocious genius, leibniz published before the age of twenty the *Dissertatio de Arte Combinatoria*. Although not the first attempt at a Symbolic logic-for leibniz knew of the work of Roman Lull in the early fourteenth Century, as exemplified in the *Ars Major* - it is still the first great modern Suggestion for a reform of the traditional logic in the direction of Symbolic or mathematical logic. In the *Dissertatio* Leibniz Proposed a twofold reform : (1) the establishment of a Universal Scientific Language to facilitate Communication among scientists, and (2) the establishment of a Universal Calculus of reasoning to expedite logical analysis and the solution of logical problems by the Kind of precise analysis that is now possible in present - day symbolic logic. Actually, the second aspect of Leibniz's Suggested program was the more important of the two and definitely anticipated the development of modern logic. Unfortunately, his contributions were fragmentary and never really developed. At the least, however, it may be said that he anticipated the modern formulation of Symbolic logic.

Two more centuries were to elapse before the next significant contributions to symbolic logic. George Boole (1815-1864) may be regarded as the second founder of symbolic logic, although his work was preceded by some significant contributions on the part of S R William Hamilton (1788-1856) and Augustus

DeMorgan (1806 - 1871). Hamilton actually contributed little to the development of Symbolic logic itself, but, his quantification of the predicate and his enthusiasm for logic in general brought about a significant revival of the study in England. De Morgan undoubtedly possessed one of the great logical minds of the time. His numerous investigations into many aspects of logic, and more particularly his study of the logic of relations, represented a significant and pronounced advance over the traditional logic and its principles.

Actually, Boole was the logician to apply mathematics in such a way as to work out a practicable calculus of logic. Using such mathematical operations as addition and multiplication, and allowing variables to stand for classes, he developed an algebra of classes for the solution of the problems of class relationships which had formerly been considered only within the context of the classical syllogism. Boole's principal works are *The Mathematical Analysis of logic* (1847) and *An Investigation of the laws of Thought* (1854).

The principal successors of Boole were W. S. Jevons (1835-1882), John Venn (1834 - 1923), and Charles S. Peirce (1839-1914), each of whom modified the Boolean algebra and made other contributions. Of these men, the most outstanding in undoubtedly the American logician Peirce whose genius was little known or appreciated until his collected works were published in the 1930's.

Peirce moved far beyond the traditional or Aristotelian logic. Defining logic as a "theory of signs" he elaborated further upon

the Boolean algebra of logic, enlarged upon the logic of relations as developed by Le Morgan, and emphasized the importance of what he termed the "illative relation" (Known later as 'material implication') as fundamental to the unity of logic.

Peirce's investigations also influenced the work of the German logician E. Schröder and led to the development of what came to be known as the *Boole Schröder* algebra of logic, particularly as it was brought out in Schröder's *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (1890 - 1905).

In the meantime, the mathematicians under the leadership of G. Peano (1858 - 1932) and his School endeavored in the *Formulaire de mathématiques* to establish certain proofs by means of which they hoped to show that mathematics was ultimately reducible to logic. In doing this they gave mathematics a "logistics" form by using the notation of symbolic logic to represent the relations of a mathematical system and to show thereby the rigorous and deductive nature of mathematics. G. Frege (1848 - 1925) was making similar Contributions but unfortunately his work did not become known until rediscovered in our own time by Russell. The more significant publications of Frege are the *Grundgesetze der Arithmetik* (1884) and the *Grundsätze der Arithmetik* (1893 - 1903).

The great Synthesis of the more important contributions of their predecessors and particularly of the logistic thesis that mathematics is reducible to logic was attained by Bertrand Russell (1872)¹ and A. N. Whitehead (1861 - 1947, with the publication of their justly famous *Principia Mathematica* (1910).

Mourant, J., Formal Logic, N. Y., 1963, pp, 214-216.

Mathematics and Logic

Mathematics and logic, historically speaking, have been entirely distinct studies. Mathematics has been connected with Science, logic with Greek. But both have developed in modern times : Logic has become more mathematical and mathematics has become more logical. The consequence is that it has now become wholly impossible to draw a line between the two; in fact, the two are one. They differ as boy and man : logic is the youth of mathematics and mathematics is the manhood of logic. This view is presented by logicians who, having spent their time in the study of classical texts, are incapable of following a piece of symbolic reasoning, and by mathematicians who have learnt a technique without troubling to inquire into its meaning or justification. Both types are now fortunately growing rare. So much of modern mathematical work is obviously on the border-line of logic, so much of modern logic is symbolic and formal, that the very close relationship of logic and mathematics has become obvious to every instructed student. The proof of their identity is, of course, a matter of detail : Starting with premisses which would be universally admitted to belong to logic, and arriving by deduction at results which as obviously belong to mathematics, we find that there is no point at which a sharp line can be drawn, with logic to left and mathematics to the right. If there are still those who do not admit the identity of logic and mathematics, we may challenge them to indicate at what point, in the successive definitions and deductions of *Principia Mathematica*, they consider that logic ends and mathematics begins. It will then be obvious that any answer must be quite arbitrary.

Russell, B., Introduction to Mathematical Philosophy, pp. 194 - 195.

Variables

The idea of a variable, as it occurs in the present work, is more general than that which is explicitly used in ordinary mathematics. In ordinary mathematics, a variable generally stands for an undetermined number or quantity. In mathematical logic, any symbol whose meaning is not determinate is called a *variable* and the various determinations of which its meaning is susceptible are called the *values* of the variables may be any set of entities, propositions, functions, classes or relations, according to circumstances. If a statement is made about "Mr A and Mr B", "Mr. A" and "Mr. B" are variables whose values are confined to men. A variable may either have a conventionally - assigned range of values, or may (in the absence of any indication of the range of values) have as the range of its values all determinations which render the statement in which it occurs significant. Thus when a text-book of logic asserts that "A is A", without any indication as to what A may be, what is meant is that *any* statement of the form "A is A" is true. we may call a variable *restricted* when its values are confined to some only of those of which it is capable; otherwise, we shall call it *unrestricted*. Thus when an unrestricted variable occurs, it represents any object such that the statement concerned can be made significantly (i. e. either truly or falsely) concerning that object. For the purpose of logic, the unrestricted variable is more convenient than the restricted variable, and we shall always employ it. We shall find that the unrestricted variable is still subject to limitations imposed by the manner of its occurrence, i.e. things which can be said significantly concerning a proposition cannot be said significantly concerning a class or a relation, and so on. But the limitations to which the unres-

tricted variable is subject do not need to be explicitly indicated since they are the limits of significance of the statement in which the variable occurs, and are therefore intrinsically determined by this statement . . .

To sume up, the three salient facts connected with the use of the variable are: (1) that a variable is ambiguous in its denotation and accordingly undefined; (2) that a variable preserves a recognizable identity in various occurrences throughout the same context, so that many variables can occur together in the same context each with its separate identity, and (3) that either the range of possible determination of two variables may be the same, so that a possible determination of one variable is also a possible determination of the other, or the range of two variables may be different, so that, if a possible determination of one variable is given to the other, the resulting complete phrase is meaningless instead of becoming a complete unambiguous proposition (true or false) as would be the case if all variables in it had been given *suitable* determinations.

Whitehead & Russell, Principia Mathematica, volume 1, pp. 4 - 5, N. Y., 1970.

Propositional Functions

We mean by a 'proposition' primarily a term of words which expresses what is either true or false. I say 'primarily' because I do not wish to exclude other than verbal symbols, or even mere thoughts if they have a symbolic character. But I think the word 'proposition' should be limited to what may, in some sense, be called 'symbols', and further to such symbols as give expression to truth and falsehood. Thus "two and two are four" and "two and two are five" will be propositions, and so will "socrates is a man" and "Socrates is not a man" A 'propositional function', in fact, is an expression containing one or more undetermined constituents, such that, when values are assigned to these constituents the expression becomes a proposition. In other words, it is a function whose values are propositions. But this latter definition must be used with caution. A descriptive function, e. g., "the hardest proposition in A's mathematical treatise", will not be a proposition, although its values are propositions. But in such a case the propositions are only described: in a propositional function, the values must actually *enunciate* propositions.

We do not need to ask, or attempt to answer, the question: "what is a propositional function?" A propositional function standing all alone may be taken to be a mere schema, a mere shell, an empty receptacle for meaning, not something already significant. We are concerned with propositional functions, broadly speaking, in two ways: first, as involved in the notions "true[?] in all cases" and "true in some cases"; secondly, as involved in the theory of classes and relations.

When we say that something is "always true" or "true in all cases", it is clear that the "something" involved cannot be a proposition. A proposition is just true or false, and there is an end of the matter. There are no instances or cases of "Socrates is a man" or "Napoleon died at St. Helena". These are propositions, and it would be meaningless to speak of their being true "in all cases". This phrase is only applicable to propositional functions. . . .

Sentences involving such words as "all", "every", "a", "the", "some" require propositional functions for their interpretation. The way in which propositional functions occur can be explained by means of two of the above words, namely, "all" and "some".

There are, in the last analysis, only two things that can be done with a propositional function: one is to assert that it is true in all cases, the other to assert that it is true in at least one case, or in some cases (as we shall say, assuming that there is to be no necessary implication of a plurality of cases). All the other uses of propositional function are true "in all cases", or "always" (as we shall also say, without any temporal suggestion), we mean that all its values are true. If " ϕx " is the function, and a is the right sort of object to be an argument to " ϕx ", then ϕa is to be true, however a may have been chosen. For example, "if x is human, x is mortal" is true whether x is human or not; in fact, every proposition of this form is true. Thus the propositional function "if x is human, x is mortal", is "always true" or "true in all cases".

Russell, B., Introduction to Mathematical philosophy, London, 1953, pp. 155 - 159.

Descriptions

By an "incomplete" symbol we mean a symbol which is not supposed to have any meaning in isolation, but is only defined in certain contexts. In ordinary mathematics, for example, $\frac{d}{dx}$ and \int_a^b are incomplete symbols : Something has to be supplied before we have anything significant. Such symbols have what may be called a "definition in use". Thus if we put

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ Df}$$

we define the use of ∇^2 , but ∇^2 , by itself remains without meaning. This distinguishes such symbols from what (in a generalized sense we may call *Proper names* : "Socrates", for example, stands for a certain man, and therefore has a meaning by itself, without the need of any context. If we supply a context, as in "Socrates is mortal", these words express a fact of which Socrates himself is a constituent : there is a certain object, namely Socrates, which does have the property of mortality. and this object is a constituent of the complex fact which we assert when we say "Socrates is mortal". But in other cases, this simple analysis fails us. Suppose we say : "The round square does not exist". It seems plain that this is a true proposition, yet we cannot regard it as denying the existence of a certain object called "the round square". For if there were such an object, it would exist : we cannot first assume that there is a certain object, and then proceed to deny that there is such an object. Whenever the grammatical subject of a proposition can be supposed not to exist without rendering the proposition meaningless, it is plain that the

grammatical subject is not a proper name i.e. not a name directly representing some object. Thus in all such cases, the proposition must be capable of being so analysed that what was the grammatical subject shall have disappeared. Thus when we say "the round square does not exist", we may, as a first attempt at such analysis, substitute "it is false that there is an object x which is both round and square". Generally, when "the so - and - so" is said not to exist, we have a proposition of the form

$$\sim \exists x (\phi x)$$

$$\text{i. e.} \quad \sim \left\{ (\exists C) : \phi x \cdot \equiv_x \cdot x = C \right\}$$

or some equivalent. Here the apparent grammatical subject $(\exists x) (\phi x)$ has completely disappeared; thus in " $\sim \exists x (\phi x)$ ", $(\exists x) (\phi x)$ is an *incomplete* symbol.

By an extension of the above argument, it can easily be shown that $(\exists x) (\phi x)$ is always an incomplete symbol. Take, for example, the following proposition: "Scott is the author of waverley". [Here "the author of waverley" is $(\exists x) (x \text{ wrote waverley})$]. This proposition expresses an identity; thus if "the author of waverley" could be taken as a proper name, and supposed to stand for some object C , the proposition be "Scott is C ". But if C is any one except Scott, this proposition is false; while if C is Scott, the proposition is "Scott is Scott", which is trivial and plainly different from "Scott is the author of waverley". Generalizing, we see that the proposition

$$a = (\exists x) (\phi x)$$

is one which may be true or may be false, but is never merely trivial, like $a = a$; whereas, if $(\iota x) (\phi x)$ were a proper name, $a = (\iota x) (\phi x)$ would necessarily be either false or the same as the trivial proposition $a = a$. We may express this by saying that $a = (\iota x) (\phi x)$ is not a value of the propositional function $a = y$ from which it follows that $(\iota x) (\phi x)$ is not a value of y . But since y may be anything, it follows that $(\iota x) (\phi x)$ is nothing. Hence, since in use it has meaning, it must be an incomplete Symbol.

It might be suggested that "Scott is the author of waverley" asserts that "Scott" and "author of waverley" are two names for the same object. But a little reflection will show that this would be a mistake. For if that were the meaning of "Scott is the author of waverley", what would be required for its truth would be that Scott should have been called the author of waverley: if he had been so called, the proposition would be true, even if some one else had written waverley; while if no one called him so, the proposition would be false, even if he had written waverley. But in fact he was the author of waverley at a time when no one called him so, and he would not have been the author if every one had called him so, but some one else had written waverley. Thus the proposition "Scott is the author of waverley" is not a proposition about names, like "Napoleon is Bonaparte"; and this illustrates the sense in which "the author of Waverley" differs from a true proper name.

The all phrases (other than propositions) containing the word *the* (in the singular) are incomplete Symbols: they have a meaning in use, but not in isolation. For "the author of waverley" cannot mean the same as "Scott" or "Scott is the author of

waverley" would mean the same as "Scott is Scott" which it plainly does not; nor can "the author of waverley" mean anything other than "Scott" or "Scott is the author of waverley" would be false. Hence "the author of waverley" means nothing.

Principia, pp. 66 - 67.

مراجع مختارة

Ambrose, A. & Iazzerowitz, M., Logic ; The Theory of Formal Inference, New York, 1961.

_____, Fundamentals of Symbolic logic, New York, 1962.

Aristotle., Prior Analytics, ed. in the basic works of Aristotle, trans. by McKeon, New York 1941.

Basson, A. H. & O'Connor, D. J., Introduction to Symbolic logic, London, 1953.

Bochenski, I.M.. Ancient Formal logic, Amsterdam, Holland, 1951

_____, A History of Formal logic, trans. and ed/ Ivo Thomas. University of Notre Dame Press, 1961.

Boehner, P., Medieval Logic, Chicago, 1952.

Boole, G.; A logical Calculus; ed. in 'Readings on logic' by Copi & Gould; London: 1964.

Breuer., Introduction to the theory of sets; Prentice - Hall; 1958.

Butter, R., The Scaffolding of Russell's Theory of Descriptions, Phil. Rev. 1954.

Carnap, R., Introduction to Symbolic logic and its applications, New York, 1958.

Carney, J. D. & Scheer, R. K., Fundamentals of logic, New York 1964.

- Carrnccio, E., Mathematics and logic in History and in Contemporary Thought, London, 1964.
- Church, A., Introduction to Mathematical logic, New York, 1956.
- Clark, J. T., Conventional logic, and Modern logic, Woodstock College Press, 1952.
- Cohen, M. & Nagel, E., Introduction to logic and Scientific Method New York, 1942.
- Cooley, J. C., A Primer of Formal logic, New York, 1942.
- Copi, I. M. Introduction to logic, New York, 1961.
- , Symbolic logic, New York, 1954.
- DE Morgan, A., Formal logic. London, 1626.
- [Dopp, J. M., Formal logic, New York, 1960.
- Eaton, R.M., General logic, New York 1959.
- Flegg. Boolean algebra and its applications, Blackie, 1934.
- Fletcher (ed.), Some Lessons in Mathematics, Cambridge University Press, 1964.
- Geach, P., 'Russell's Theory of Descriptions' in Philosophy and Analysis, ed. M. Macdonald. Oxford, 1954.
- [Goodstein, Boolean algebra, Pergamon, 1963.
- Halberstadt, W. H., An Introduction to Modern logic, New York, 1960.

Hilbert, D. & Ackermann, W., Principles of Mathematical logic,
New York, 1950.

Honderich, E. D. R., 'Logic and Knowledge', in Philosophy, 1962.

Jager, R., 'Russell's Denoting Complex' in Analysis, 1960.

Jevons, W. S., Elementary lesson in logic, London, 1928.

Jonsson, W. E., Logic. I, II, Cambridge, 1916.

Joseph, H. B. W., Introduction to logic, New York, 1916.

Keynes, J.N., Studies and Exercises in Formal logic, London, 1928

Kneale, W., Boole and the Revival of logic, Mind. Vol. LVII,
No. 226, April, 1948.

Kneebone, G. T., Mathematical logic and the Foundations of
Mathematics, London, 1963.

Langer, S. K., Introduction to Symbolic logic, London, 1937.

Le Blanc, H., An Introduction to Deductive logic, New York, 1957

Lee, H., Symbolic logic, London 1962.

Leonard, H., Principles of Right Reason, New York, 1957.

Lipschutz, S., Set Theory and related topics, Schaum, 1964.

Lukasiewicz, J., Aristotle's Syllogistic, Oxford, 1951.

Maritain, J., An Introduction to logic, New York 1937.

Mill, J. S., A System of logic, London, 1970.

Mitchell, D., An Introduction to logic, London, 1968.

Mourant, J. A., Formal logic, London 1963.

Parker, F. H. & Veatch, H. B., logic as a Human Instrument,
New York, 1959.

Prior, A.N., Formal logic, Oxford, 1953.

Quine, W. V., Methods of logic, New York, 1950.

—————, Mathematical logic, New York, 1951.

Ramsey, F., The Foundations of Mathematics and other logical
Essays, London, 1931.

Reichenbach, H., Elements of Symbolic logic, New York, 1947.

Rosenbloom; P.; Elements of Mathematical logic, New York; 1954

Russell, B., The Principles of Mathematics; London; 1937.

—————; Introduction to Mathematical Philosophy.
London; 1953.

—————; 'On the Relations of Number and Quantity;
in Mind; 1896,

—————; 'Meinong's Theory of Complexes and Ass-
sumptions; in Mind 1904.

—————; 'The Theory of Implication; Amer. Jour.
of Math. 1906.

—————; The Philosophical Importance of Mathema-
tical logic, in Monist, 1913.

- Russell, B., *logic and Knowledge*, (ed) by R.C. Marsh London, 1968
- Schilpp, P. A., (ed) *The Philosophy of Bertrand Russell*, New York, 1944.
- Schoenman, R. (ed) *Bertrand Russell, Philosopher of the Century*, London, 1967.
- Stebbing, L. S.; *A Modern Introduction to logic*; New York; 1961
_____ ; *A Modern Elementary logic*; London; New York 1961.
- Stoll, R.; *Sets, logic and Axiomatic Theories*, Freeman, 1961.
- Strawson. P. F., *Introduction to logical Theory*, New York 1952
- Suppes. P., *Introduction to logic*, New York, 1957.
- Tarski, A., *Introduction to logic*. New York 1941.
_____, *logic. Semantics and Metamathematics*. Oxford 1956.
- Welton , J., *Intermediate logic*. London 1938.
- Whately. R . *Elements of logic*. Boston. 1943.
- Whitehead A. N. & Russell B. *Principia Mathematica*, New York 1970.
- Whitesitt. *Boolean algebra and its applications*. Addison wesley, 1961.
- Wittgenstein. L.. *Tractatus logic-Philosophicus*. trans. into English by D. F. Pears and B. F. McGuinness. London. 1966.

كشاف الرموز

	يقرأ universal Class وكان « بول » أول من إستخدام هذا الرمز ليشير به الى « فصل كل الأشياء » ، أى الفصل الكلى ،
○	ويقرأ null Class و « استخدمه » بول ، للإشارة الى الفصل « صفري » ، أى « الفصل الذى عضوه لاشئ » .
⊂	رمز الإحتواء inclusion .
∩	يرمز الى التقاطع intersection بين مجموعتين من الأشياء ، ويعبر به عن حاصل الضرب المنطقى logical product .
∪	يرمز إل الاتحاد union بين مجموعتين من الأشياء ، ويعبر به عن الجمع المنطقى logical Sum .
⊢	علامة رمز بها فريجه للتقرير assertion وتدل على أن القضية التى تتحدث عنها مثبتة أو مقررة .
¬	يشير هذا الرمز الى النفى negation أو السلبى ويقرأ « not »
∧	يشير هذا الرمز إلى الوصل Conjunction ويقرأ « and » .
∨	يشير هذا الرمز الى الفصل disjunction ويقرأ « or » .
⇒	يشير الى التضمن implication ويقرأ « imply »
≡	يشير هذا الرمز الى التكافؤ equivalenec ويقرأ equivalent

رمز يشير الى عدم الاتفاق <i>incompatibility</i> ويقرأ <i>Stroke</i>	\
رمز يشير به بول الى التضمن بين المجاميع ويقرأ <i>imply</i>	\Rightarrow
رمز يشير به أنصار المنطق الحدسي الى النفي <i>negation</i>	\neg
رمز يشير به أنصار المنطق الحدسي الى الوصل <i>Conjunction</i> ويعرف برابط البدائل .	\wedge
رمز يشير الى السور الكلى <i>universal quantifier</i> للقضية ، ويقابل في المنطق التقليدي كلمة كل . ويقرأ في كل قيم x .	$\forall x$
رمز يشير الى السور الجزئي أو الوجودي <i>existential</i> للنقض ، ويقابل في المنطق التقليدي كلمة « بعض » . ويقرأ في بعض قيم x .	$\exists x$
رمز رياضي مأخوذ من اليونانية ويقرأ <i>phi</i>	ϕ
رمز رياضي مأخوذ من اليونانية ويقرأ <i>psi</i>	ψ
رمز رياضي مأخوذ من اليونانية ويقرأ <i>Chi</i>	χ
رمز رياضي مأخوذ من اليونانية . ويقرأ <i>theta</i>	θ
رمز رياضي يرمز به في نظريه حساب الفصول الى عضويه الفرد في فصل ويقرأ <i>epsilon</i> .	ϵ
رمز للنفي في نظريه حساب الفصول ويقرأ <i>not</i>	\neg
رمز يشير به المذهب اللوجستيقي للفصل المكلي في نظرية حساب الفصول في مبادئ الرياضيات .	\forall

Δ رمز يشير به المذهب اللوجستيقي للفصل الصغرى في اطار نظرية حساب النصول

$\exists!a$ رمز مستخدم في نظريه حساب النصول ويرمز به لوجود الفصل ويقراً a exists

\succ رمز رياضى يشير الى علاقة أكبر من ويقراً greater than

\prec رمز رياضى يشير الى علاقة أصغر من ويقراً less than

$\dot{\vee}$ رمز يستخدم في نظرية حساب العلاقات ويشير الى العلاقة الكلية $\text{universal relation}$

$\dot{\wedge}$ يشير هذا الرمز في نظريه حساب العلاقات الى العلاقة الصغريه null relation

$\exists!R$ يشير هذا الرمز في نظريه حساب العلاقات الى العلاقة التى تقوم بين زوج واحد من الحدود على الأقل ويقراً $R\text{-exists}$

$\overset{U}{R}$ رمز يشير الى عكس العلاقة R ويقراً $R\text{-Converse}$

$D'R$ رمز يشير الى ميدان العلاقة

$D'R$ رمز يشير الى عكس الميدان

$C'R$ رمز يشير الى مجال العلاقة

RIS رمز يشير الى حاصل الضرب النسبي لعلاقتين

(ϕx) يشير هذا الرمز في نظرية الاوصاف الى قيم x التي تحقق الدالة ϕx

$E!(\phi x)$ يشير هذا الرمز في نظرية الاوصاف الى وجود القيمة x التي تحقق

الدالة ϕx ويختلف معنى هذا الرمز عن الرمز \exists المستخدم في نظرية

حساب المحمول .

الباب الأول

من المنطق الصوري إلى المنطق الرياضي

٢	مقدمة
	الفصل الأول : المنطق الصوري تعريفاته وأقسامه
٩	أ - معنى الكلمة
١١	ب - تعريفات المنطق
١٥	ج - أقسام المنطق الصوري
٢٤	د - التصورات والتصديقات
	الفصل الثاني : المنطق علم قوانين الفكر
٢٩	أ - المنطق علم
٤٠	ب - قوانين الفكر الأساسية
	الفصل الثالث : الانتقال من المنطق الصوري إلى المنطق الرياضي
٤٩	أ - المنطق الصوري والمنطق المادي
٥٥	ب - المنهج الاستقرائي والمنهج الاستدلالي الرياضي
٥٧	ج - خطوات نحو المنطق الرياضي
٥٧	١ - أرسطو
٦٤	٢ - الرواقيون

٧٣	٣ - ديكارت
٧٤	٤ - لينتز
٧٩	٥ - وليم هاملتون
٨٠	٦ - دي مورنجان
٨٠	٧ - جورج بول
٩٠	٨ - يمانو
١٠١	٩ - فريجة والاتجاه اللوجيستيق

الباب الثاني

رسل : بين المنطق التقليدي وبين المنطق الرياضي

١١٣	مقدمة
١١٥	الفصل الاول : رسل ونقد المنطق الارسطي
١٢٣	الفصل الثاني : رسل وأسس المنطق الرياضي
١٢٥	١ - القضية الذرية
١٢٦	٢ - القضية الجزئية

الباب الثالث

العلاقة بين المنطق والرياضية

- ١ - مذهب التشابه الظاهري ١٣٧
- ٢ - مذهب جبر المنطق ١٤١
- ٣ - المذهب اللوجيستيقي ١٤٧
- ٤ - المذهب الاكسيوماتيكي ١٤٩
- ٥ - المذهب الحدسي ١٥٣

الباب الرابع

نظريات المنطق الرياضي

- الفصل الاول : نظرية حساب القضايا (اللوجيستيقا) ١٦١
- الفصل الثاني : نظرية حساب المحمول ١٨٧
- الفصل الثالث : نظرية الفصول ٢٢٩
- الفصل الرابع : نظرية العلاقات ٢٥٣

الباب الخامس

نظرية الأوصاف

٢٨٥	الوصف المحدد	
٢٨٥	الوصف المبهم	
٢٩١	التعريفات الأساسية	
٢٩١	نماذج البراهين	
٣٠٧	نصوص مختارة	
	The development of Symbolic Logic	309
	Mathematics and Logic	312
	Variables	313
	Propositional Functions	315
	Descriptions	317
٢٢١	مراجع الكتاب	
٢٢٩	كشف الرموز	
٢٢٢	فهرست الكتاب	

Bibliotheca Alexandrina



0225047